

# ベクトル解析入門

鈴木 修吾

2025年3月15日



# 目次

<b>第1章 基礎事項</b>	<b>1</b>
1.1 微分積分	1
1.2 線形代数	3
<b>第2章 場の微分積分</b>	<b>7</b>
2.1 スカラー場とベクトル場	7
2.2 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素	7
2.3 線積分・面積分・体積分	9
2.4 勾配・回転・発散	10
<b>第3章 直交座標</b>	<b>13</b>
3.1 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素	13
3.2 線積分・面積分・体積分	17
3.3 勾配・回転・発散	21
3.4 積の微分公式	27
<b>第4章 球座標</b>	<b>29</b>
4.1 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素	29
4.2 線積分・面積分・体積分	33
4.3 勾配・回転・発散	38
<b>第5章 円柱座標</b>	<b>45</b>
5.1 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素	45
5.2 線積分・面積分・体積分	49
5.3 勾配・回転・発散	54
<b>第6章 積分定理</b>	<b>63</b>
6.1 微分積分学の基本定理	63
6.2 ストークスの定理	63

6.3	ガウスの定理 . . . . .	65
6.4	部分積分の公式 . . . . .	66
<b>補章 A</b>	<b>基底変換</b>	<b>67</b>
A.1	ヤコビ行列とヤコビアン . . . . .	67
A.2	$\mathbb{R}^3$ における基底変換 . . . . .	68
A.3	直交曲線座標における基底変換 . . . . .	70

# 第1章 基礎事項

## 1.1 微分積分

### 偏微分

変数  $x, y, z$  の関数  $f = f(x, y, z)$  について

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (1.1.1)$$

を  $f$  の  $x$  による1階の**偏微分**という。 $y, z$  による偏微分についても同様に定義する。ここで、左辺の  $()$  につけた添え字  $yz$  は偏微分を行う際に  $y, z$  を一定とみなすことを意味する。本書では主にこの記法を用いるが、偏微分を表すのに

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_x f \quad (1.1.2)$$

などの記法も多く用いられる。ただし、あとの2つの記法においては偏微分を行う際に一定とみなす変数が明示されていないので、これらの記法を用いるときには一定とみなす変数が何であるかについて注意する必要がある。1階の偏微分は、**テイラー展開**

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &= f(x, y, z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \Delta z + \dots \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

において、変数  $x, y, z$  の変化  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  について1次の項の係数としてあらわれる。(1.1.3)における  $\dots$  は変数の変化について2次以上の項を表す。

### 全微分

変数  $x, y, z$  の微小変化  $dx, dy, dz$  にともなう  $f$  の微小変化

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} dz \quad (1.1.4)$$

を  $f$  の全微分という。いま、関数  $g, h$  を一定とするもとの  $f$  の微小変化を

$$(df)_{gh} \quad (1.1.5)$$

と表すことにしよう。特に、 $g = f$  または  $h = f$  ならば

$$(df)_{gh} = 0 \quad (1.1.6)$$

である。このことに注意すると

$$\begin{aligned} (df)_{yz} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} (dx)_{yz} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} (dy)_{yz} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} (dz)_{yz} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} (dx)_{yz} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

と書けるから、両辺を  $(dx)_{yz}$  で割ると

$$\frac{(df)_{yz}}{(dx)_{yz}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \quad (1.1.8)$$

が成り立つ。また、 $x, y, z$  がもう 1 組の変数  $u, v, w$  によって

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \quad (1.1.9)$$

と表される場合、 $v, w$  を一定にすると

$$(df)_{vw} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} (dx)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} (dy)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} (dz)_{vw} \quad (1.1.10)$$

であるから、両辺を  $(du)_{vw}$  で割ると

$$\frac{(df)_{vw}}{(du)_{vw}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \frac{(dx)_{vw}}{(du)_{vw}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \frac{(dy)_{vw}}{(du)_{vw}} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \frac{(dz)_{vw}}{(du)_{vw}}, \quad (1.1.11)$$

つまり、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} \quad (1.1.12)$$

となる。 $v, w$  による偏微分についても同様に考えると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} \quad (1.1.13)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \quad (1.1.14)$$

が成り立つことがわかる。(1.1.12), (1.1.13), (1.1.14) は連鎖律とよばれ、変数変換において偏微分の変換則を与える極めて重要な関係式である。

## 1.2 線形代数

### 内積

ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の間に

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1.2.1)$$

によって内積を定義する。ここで、 $|\mathbf{a}|$  はベクトル  $\mathbf{a}$  の長さを表し、また、 $\theta$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  がなす角である。内積については

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ (2) \quad & \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \\ (3) \quad & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \\ (4) \quad & (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ (5) \quad & \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

が成り立つ。また、任意のベクトル  $\mathbf{a}$  を

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.2.3)$$

と表すことができ、同時に、

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.2.4)$$

を満たすベクトルの組  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  を正規直交基底という。このとき、(1.2.3)における基底ベクトル  $\mathbf{e}_i$  の係数  $a_i$  をベクトル  $\mathbf{a}$  のこの基底に関する第  $i$  成分という。ベクトルの成分を用いるとベクトルの長さは

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (1.2.5)$$

と表され、また、内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.2.6)$$

と表される。

### 外積

ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) から新たなベクトル  $\mathbf{c}$  を3つの要請

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{a} \perp \mathbf{c} \text{ かつ } \mathbf{b} \perp \mathbf{c} \\ (2) \quad & |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \\ (3) \quad & \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

を満たすようにつくる。ここで、要請(2)における $\theta$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角のうち小さいほうであるとする。また、要請(3)における行列式 $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ のベクトルの成分は、回転によって $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ に重ねることができる正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ についてのものであるとする。ただし、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のうち少なくとも一方が $\mathbf{0}$ のときは $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ と定める。(1.2.7)の要請(1), (2), (3)を満たすようにつくったベクトル $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積とよび $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と書く。要請(2)によって $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ によってつくられる平行四辺形の面積であり、また、要請(3)によってその向きは $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ に重ねるように右ネジを回すときにネジが進む向きである。この項目の最後で示すように、外積はベクトルの成分を用いると

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \quad (1.2.8)$$

と表せる。これを

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.2.9)$$

と書くと覚えやすい。外積については

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ (2) \quad & \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \\ (3) \quad & \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \\ (4) \quad & (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ (5) \quad & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

が成り立つ。さて、(1.2.7)の要請(1), (2), (3)から(1.2.8)を導こう。まず、要請(1)から

$$\begin{aligned} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

である。これら2式を用いると容易に

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 - (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_3 &= 0 \\ -(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

を示せる。したがって、

$$c_1 : c_2 : c_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (1.2.13)$$

あるいは、パラメータ  $t$  を用いて

$$\mathbf{c} = t \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \right) \quad (1.2.14)$$

と書ける。次に、要請 (2) から

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

となるから、(1.2.14) における  $t$  は  $+1$  または  $-1$  のいずれかであることがわかる。さらに、要請 (3) から

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \\ &= t \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

であるから、 $t = +1$  でなければならないことがわかる。以上によって、(1.2.7) の要請 (1), (2), (3) から (1.2.8) が導かれた。

## スカラー 3 重積とベクトル 3 重積

3 つのベクトル  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  からつくられた

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (1.2.17)$$

をスカラー 3 重積という。スカラー 3 重積は

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.2.18)$$

と表すことができる。この表式から

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (1.2.19)$$

が成り立つことがわかる。幾何学的には、スカラー3重積は  $a, b, c$  からつくられる平行六面体の体積を表す。ただし、スカラー3重積で表される体積は正であることも負であることもある。 $a \cdot (b \times c)$  が正のとき、 $a, b, c$  は**右手系**をなすといい、 $a \cdot (b \times c)$  が負のとき、 $a, b, c$  は**左手系**をなすという。また、

$$a \times (b \times c) \tag{1.2.20}$$

を**ベクトル3重積**という。ベクトル3重積については、**ラグランジュの公式**

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \tag{1.2.21}$$

が成り立つ。なお、外積については結合律が成り立たない、つまり、 $a \times (b \times c)$  と  $(a \times b) \times c$  とは必ずしも等しくないという点に注意する必要がある。

## 第2章 場の微分積分

### 2.1 スカラー場とベクトル場

空間の各点  $\mathbf{r}$  においてスカラー  $f(\mathbf{r})$  が定まるとき、 $f$  をスカラー場という。また、空間の各点  $\mathbf{r}$  においてベクトル  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  が定まるとき、 $\mathbf{V}$  をベクトル場という。ベクトル場について注意する必要があるのは、各点  $\mathbf{r}$  ごとにその点に付随するベクトル空間をそれぞれ考えなければならないという点である。この意味で、無限個のベクトル空間における  $\mathbf{r}$  の変化にともなうベクトルの変化を微分積分によってあつかう数学的手段がベクトル解析であるといえる。

### 2.2 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素

#### 線素ベクトル

ベクトル解析において最も基本となる概念が線素ベクトルである。線素ベクトルとは空間の2点  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  を結ぶ微小変位  $d\mathbf{r}$  のことをいう。線素ベクトル  $d\mathbf{r}$  の大きさを線素といい、通常これを  $ds$  で表す。したがって、 $d\mathbf{r}$  と同じ向きの単位ベクトルを  $\mathbf{t}$  とすると

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds \quad (2.2.1)$$

と書ける。線素ベクトルは曲線に沿うベクトル場の線積分を考える際に重要となるのははじめとして、次に説明する面素ベクトル、体積要素を定義する上で重要となる。

#### 面素ベクトル

点  $\mathbf{r}$  における2つの線素ベクトルを  $d\mathbf{r}_1$ ,  $d\mathbf{r}_2$  とするとき

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 \quad (2.2.2)$$

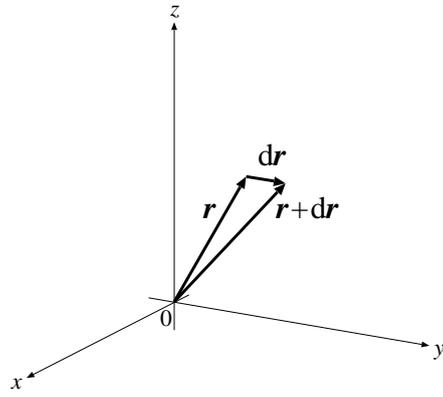


図 2.1: 線素ベクトル

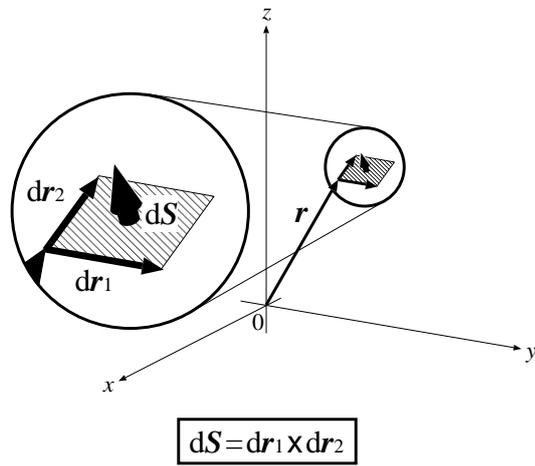


図 2.2: 面素ベクトル

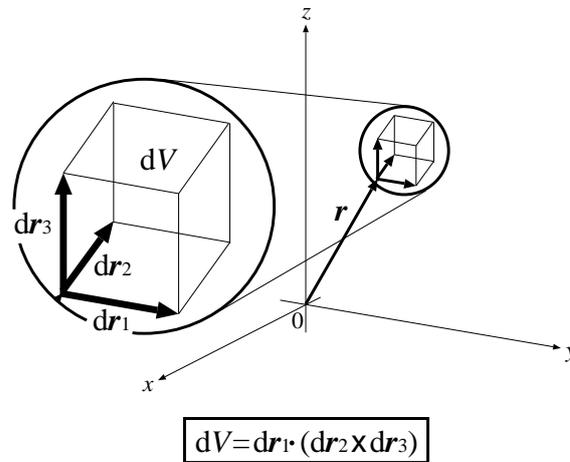


図 2.3: 体積要素

は  $dr_1$ ,  $dr_2$  からつくられる微小な平行四辺形の面積を表すベクトルである。  $d\mathbf{S}$  を面素ベクトルという。面素ベクトル  $d\mathbf{S}$  の大きさを面素といい、通常これを  $dS$  で表す。したがって、  $d\mathbf{S}$  と同じ向きの単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (2.2.3)$$

と書ける。面素ベクトルは曲面上でのベクトル場の面積分を考える際に重要となる。

### 体積要素

点  $\mathbf{r}$  における 3 つの線素ベクトルを  $dr_1$ ,  $dr_2$ ,  $dr_3$  とするとき

$$dV = dr_1 \cdot (dr_2 \times dr_3) \quad (2.2.4)$$

は  $dr_1$ ,  $dr_2$ ,  $dr_3$  からつくられる微小な平行六面体の体積を表す。  $dV$  を体積要素という。体積要素はスカラー場の体積分を考える際に重要となる。

## 2.3 線積分・面積分・体積分

### 線積分

ベクトル場  $\mathbf{V}$  および向きづけられた曲線  $\Gamma$  が与えられたとき、  $\Gamma$  に沿う  $\mathbf{V}$  の線積分を

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.3.1)$$

と定義する。特に、 $\Gamma$  が閉曲線のとき、(2.3.1) を  $\Gamma$  に沿う  $\mathbf{V}$  の循環という。

## 面積分

ベクトル場  $\mathbf{V}$  および向きづけられた曲面  $\Sigma$  が与えられたとき、 $\Sigma$  上での  $\mathbf{V}$  の面積分を

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.3.2)$$

と定義する。特に、 $\Sigma$  が閉曲面のとき、(2.3.2) を  $\Sigma$  の内部からの  $\mathbf{V}$  の流出という。ここで曲面の向きとその境界の向きに関する約束について述べておこう。曲面  $\Sigma$  の境界を  $\partial\Sigma$  とするとき、 $\partial\Sigma$  の向きは  $\Sigma$  の表を左側にみて進む向きと約束する。言葉を換えていえば、 $\partial\Sigma$  の向きに右ネジを回すとネジが  $\Sigma$  の表向きに進むように約束したことになる。

## 体積分

スカラー場  $f$  および空間の領域  $\Omega$  が与えられたとき、 $f$  の  $\Omega$  における体積分を

$$\iiint_{\Omega} f \, dV \quad (2.3.3)$$

と定義する。曲面の場合と同様に、領域  $\Omega$  の境界を  $\partial\Omega$  と表す。このとき、特に断らなければ  $\Omega$  の外側を  $\partial\Omega$  の表にとるのが慣例である。

## 2.4 勾配・回転・発散

### 勾配

スカラー場  $f$  の勾配  $\nabla f$  は

$$\nabla f \cdot d\mathbf{r} = df \quad (2.4.1)$$

を満たすベクトル場として定義される。ここで、 $d\mathbf{r}$  は任意の微小変位である。 $d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds$  を用いると

$$\nabla f \cdot \mathbf{t} = \frac{df}{ds} \quad (2.4.2)$$

と書ける。(2.4.2) を  $f$  の  $\mathbf{t}$  方向についての方向微分係数という。したがって、 $\nabla f$  はその方向が  $f$  の方向微分係数の最大値を与える方向に一致し、その大きさが方向微分係数の最大値に等しいようなベクトル場であることがわかる。また、 $f$  の

等位面に接する方向については  $df = 0$  であるから、 $\nabla f$  は  $f$  の等位面に直交していることがわかる。次に、 $\nabla f$  の線積分について考えてみよう。 $\nabla f$  を点  $\mathbf{r}_a$  から点  $\mathbf{r}_b$  まで線積分すると

$$\int_{\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_b} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_b} df = f(\mathbf{r}_b) - f(\mathbf{r}_a) \quad (2.4.3)$$

となる。つまり、 $\nabla f$  の線積分は積分経路の始点と終点における  $f$  の値の差のみで決まり、途中の道すじにはよらないことがわかる。特に、積分経路が閉曲線するとき  $\nabla f$  の線積分 (2.4.3) は 0 となる。このことから、ベクトル場  $\mathbf{V} = \nabla f$  は**保存場**とよばれる。

## 回転

ベクトル場  $\mathbf{V}$  の**回転**  $\nabla \times \mathbf{V}$  は

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \Delta \mathbf{S} = \int_{\partial \sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.4.4)$$

を満たすベクトル場として定義される。ここで、 $\sigma$  は任意の微小曲面であり、 $\Delta \mathbf{S}$  はその面素ベクトルである。 $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{n} \Delta S$  を用いると

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\Delta S} \int_{\partial \sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.4.5)$$

と書ける。(2.4.5) を  $\mathbf{V}$  の  $\mathbf{n}$  方向についての**渦度**という。この式からわかるように、渦度は与えられた方向を法線方向とする面における単位面積当たりの循環を表す量である。したがって、 $\nabla \times \mathbf{V}$  はその方向が  $\mathbf{V}$  の渦度の最大値を与える方向に一致し、その大きさが渦度の最大値に等しいようなベクトル場であることがわかる。また、任意の点において  $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$  となるようなベクトル場は**渦なし**であるという。(2.4.4) による定義から明らかのように、保存場  $\mathbf{V} = \nabla f$  については  $\partial \sigma$  が閉曲線であるために線積分が 0 となり、その結果、 $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$  であることがわかる。つまり、保存場は渦なしであり、任意の点において

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (2.4.6)$$

が成り立つ。

## 発散

ベクトル場  $\mathbf{V}$  の**発散**  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  は

$$\nabla \cdot \mathbf{V} \Delta V = \iint_{\partial \omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.4.7)$$

を満たすスカラー場として定義される。ここで、 $\omega$  は体積  $\Delta V$  の任意の微小領域であり、 $\partial\omega$  は  $\omega$  の境界を表す。この定義を

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\Delta V} \iint_{\partial\omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.4.8)$$

と書けば明らかなように、発散は単位体積当たりの流出を表す量であることがわかる。このため、発散は湧き出しともよばれる。また、任意の点において  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  となるようなベクトル場は湧き出しなしであるという。後に示すように、ベクトル場  $\mathbf{V}$  の回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  は湧き出しなしである。つまり、任意の点において

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (2.4.9)$$

が成り立つ。

## ラプラシアン

ラプラシアン  $\nabla^2$  はスカラー場  $f$  について

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (2.4.10)$$

によって定義される 2 階の微分演算子である。

## 第3章 直交座標

### 3.1 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素

#### 線素ベクトル

直交座標では図3.1に示すように  $x, y, z$  の値を1組与えることによって空間の点  $(x, y, z)$  を指定する。ここで,  $x, y, z$  の動く範囲は  $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$  である。このとき,  $y, z$  が一定の直線,  $z, x$  が一定の直線,  $x, y$  が一定の直線をそれぞれ  $x$  直線,  $y$  直線,  $z$  直線といい, これらを総称して**座標直線**とよぶ。また,  $x$  が一定の平面,  $y$  が一定の平面,  $z$  が一定の平面をそれぞれ  $yz$  平面,  $zx$  平面,  $xy$  平面といい, これらを総称して**座標平面**とよぶ。与えられた  $x, y, z$  の値について  $x$  直線,  $y$  直線,  $z$  直線を描くと, これら3つの直線は点  $(x, y, z)$  で交わることになる。さらに,  $x$  直線,  $y$  直線,  $z$  直線の正の向きを向く単位ベクトル  $e_x, e_y, e_z$  をこの点における正規直交基底として採用する。直交座標の最大の特徴は, 空間の各点に付随する正規直交基底  $e_x, e_y, e_z$  を他の点に付随する正規直交基底  $e_x, e_y, e_z$  に平行移動のみによって重ねることができるという点である。このため, 直交座標は場の微分を行う際に計算が大変簡単になるという利点をもつ。なお, 本来ならば点  $(x, y, z)$  に付随する正規直交基底であることを明示するために  $e_x(x, y, z), e_y(x, y, z), e_z(x, y, z)$  のように表すのがより正確であるが,  $(x, y, z)$  を省略して単に  $e_x, e_y, e_z$  と記すことが多い。さて, 図3.2に示すように点  $(x, y, z)$  における線素ベクトル  $d\mathbf{r}$  は点  $(x, y, z)$  と点  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  を結ぶ微小変位であり,

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z \quad (3.1.1)$$

と表される。

#### 面素ベクトル

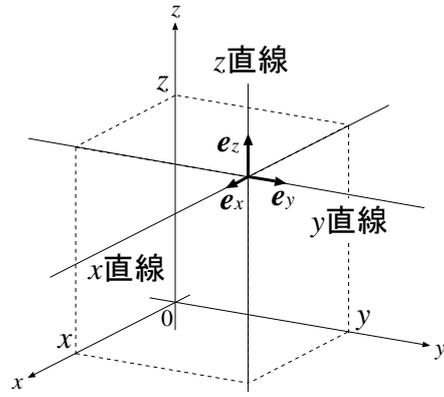
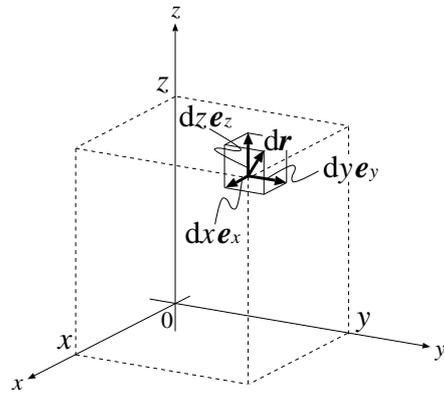


図 3.1: 直交座標



$$\mathbf{dr} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$$

図 3.2: 直交座標における線素ベクトル

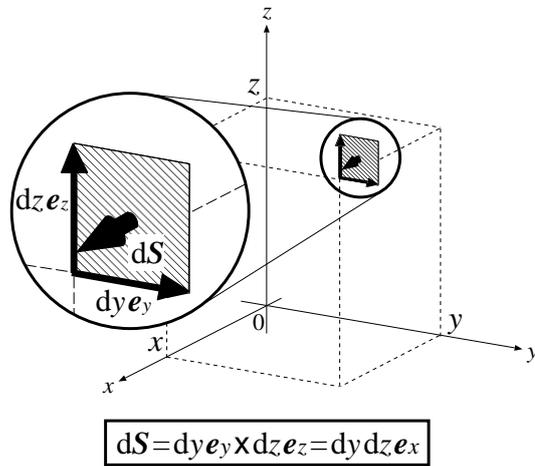


図 3.3: 直交座標における面素ベクトル ( $yz$  平面の場合)

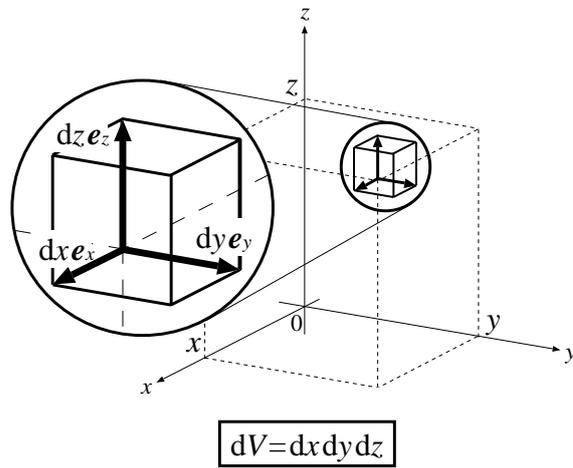


図 3.4: 直交座標における体積要素

点  $(x, y, z)$  における 2 つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= dx_1 \mathbf{e}_x + dy_1 \mathbf{e}_y + dz_1 \mathbf{e}_z \\ d\mathbf{r}_2 &= dx_2 \mathbf{e}_x + dy_2 \mathbf{e}_y + dz_2 \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

からつくられる面素ベクトルは

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 \\ &= \begin{vmatrix} dy_1 & dz_1 \\ dy_2 & dz_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} dz_1 & dx_1 \\ dz_2 & dx_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 \\ dx_2 & dy_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

と表される。座標平面の場合を考えるとこの表式は特に簡単なものとなる。ここでは  $yz$  平面を例として取り上げ、その上の面素ベクトルについて説明する。ただし、 $yz$  平面の表を  $x$  直線の正の向きにとることにする。  $dy, dz$  は正であるとして図 3.3 に示す 2 つの線素ベクトル

$$d\mathbf{r}_1 = dy \mathbf{e}_y, \quad d\mathbf{r}_2 = dz \mathbf{e}_z \quad (3.1.4)$$

を考えよう。これら 2 つの線素ベクトルから  $yz$  平面上の面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = dy \mathbf{e}_y \times dz \mathbf{e}_z = dy dz \mathbf{e}_x \quad (3.1.5)$$

となることがわかる。つまり、 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  と書けば  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ 、 $dS = dy dz$  である。同様に考えて、 $zx$  平面上の面素ベクトルは、平面の表を  $y$  直線の正の向きにとれば、

$$d\mathbf{S} = dz \mathbf{e}_z \times dx \mathbf{e}_x = dz dx \mathbf{e}_y \quad (3.1.6)$$

であり、また、 $xy$  平面上の面素ベクトルは、平面の表を  $z$  直線の正の向きにとれば、

$$d\mathbf{S} = dx \mathbf{e}_x \times dy \mathbf{e}_y = dx dy \mathbf{e}_z \quad (3.1.7)$$

である。ただし、 $dx, dy, dz$  はすべて正であると考えよう。

## 体積要素

図 3.4 に示すように、 $dx, dy, dz$  はすべて正であるとして点  $(x, y, z)$  における 3 つの線素ベクトル

$$d\mathbf{r}_1 = dx \mathbf{e}_x, \quad d\mathbf{r}_2 = dy \mathbf{e}_y, \quad d\mathbf{r}_3 = dz \mathbf{e}_z \quad (3.1.8)$$

を考えると、直交座標における体積要素は

$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{r}_1 \cdot (d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3) = dx \mathbf{e}_x \cdot (dy \mathbf{e}_y \times dz \mathbf{e}_z) \\ &= dx dy dz \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

と表される。

## 3.2 線積分・面積分・体積分

### 座標直線に沿う線積分

直交座標の座標直線に沿う線積分の求め方について説明しよう。そのために、例として  $x$  直線に沿う線積分を考える。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は直交座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + V_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + V_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \quad (3.2.1)$$

と表されるとする。また、積分経路として

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, y = y_0, z = z_0\} \quad (3.2.2)$$

を考えよう。ただし、 $\Gamma$  は点  $(a, y_0, z_0)$  から点  $(b, y_0, z_0)$  へと向きづけられているとする。 $\Gamma$  上では  $y, z$  は一定、つまり、 $dy = 0, dz = 0$  であるから、 $\Gamma$  に沿う線素ベクトルは

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x \quad (3.2.3)$$

と表される。したがって、 $\Gamma$  上の点  $(x, y_0, z_0)$  における  $\mathbf{V}$  と  $d\mathbf{r}$  の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = V_x(x, y_0, z_0) dx \quad (3.2.4)$$

となるから、 $\Gamma$  に沿う  $\mathbf{V}$  の線積分を求めるには

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b V_x(x, y_0, z_0) dx \quad (3.2.5)$$

を計算すればよいことがわかる。たとえば、ベクトル場として

$$\mathbf{V} = xyz \mathbf{e}_x + x^2 y^2 z^2 \mathbf{e}_y + x^3 y^3 z^3 \mathbf{e}_z \quad (3.2.6)$$

を考えれば

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b xy_0 z_0 dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)y_0 z_0 \quad (3.2.7)$$

となる。ここでは例として  $x$  直線上の積分経路に沿う線積分の求め方について説明したが、 $y$  直線上の積分経路

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid x = x_0, a \leq y \leq b, z = z_0\} \quad (3.2.8)$$

に沿う線積分を求めるには

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b V_y(x_0, y, z_0) dy \quad (3.2.9)$$

を計算すればよい。また、 $z$ 直線上の積分経路

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid x = x_0, y = y_0, a \leq z \leq b\} \quad (3.2.10)$$

に沿う線積分を求めるには

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b V_z(x_0, y_0, z) dz \quad (3.2.11)$$

を計算すればよい。

### 一般の曲線に沿う線積分

ここでは積分経路が一般の曲線上にある場合を考える。まず、曲線  $\Gamma$  をパラメータ表示する。つまり、パラメータ  $p$  用いて

$$x = x(p), \quad y = y(p), \quad z = z(p) \quad (3.2.12)$$

のように  $\Gamma$  上の点  $(x(p), y(p), z(p))$  を表す。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は直交座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_x(p)\mathbf{e}_x + V_y(p)\mathbf{e}_y + V_z(p)\mathbf{e}_z \quad (3.2.13)$$

と表されたとする。ただし、 $V_x(x(p), y(p), z(p))$ などを簡単に  $V_x(p)$  などと書いた。このとき、

$$dx = \frac{dx}{dp} dp, \quad dy = \frac{dy}{dp} dp, \quad dz = \frac{dz}{dp} dp \quad (3.2.14)$$

であるから、 $\Gamma$  に沿う線素ベクトルは

$$d\mathbf{r} = \left( \frac{dx}{dp} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dp} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dp} \mathbf{e}_z \right) dp \quad (3.2.15)$$

と表される。したがって、 $\Gamma$  上の点  $(x(p), y(p), z(p))$  における  $\mathbf{V}$  と  $d\mathbf{r}$  の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ V_x(p) \frac{dx}{dp} + V_y(p) \frac{dy}{dp} + V_z(p) \frac{dz}{dp} \right\} dp \quad (3.2.16)$$

となるから、 $\Gamma$ に沿う  $\mathbf{V}$  の線積分を求めるには

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \left\{ V_x(p) \frac{dx}{dp} + V_y(p) \frac{dy}{dp} + V_z(p) \frac{dz}{dp} \right\} dp \quad (3.2.17)$$

を計算すればよいことがわかる。

### 座標平面上での面積分

直交座標の座標平面上での面積分の求め方について説明しよう。そのために例として  $yz$  平面上での面積分を考える。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は直交座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + V_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + V_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \quad (3.2.18)$$

と表されるとする。また、積分領域として

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x = x_0, a \leq y \leq b, c \leq z \leq d\} \quad (3.2.19)$$

を考えよう。ただし、 $\Sigma$  は  $x$  直線の正の向きに向きつけられているとする。3.1 節で (3.1.5) として求めたように、 $yz$  平面上の面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{e}_x \quad (3.2.20)$$

である。したがって、 $\Sigma$  上の点  $(x_0, y, z)$  における  $\mathbf{V}$  と  $d\mathbf{S}$  の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = V_x(x_0, y, z) dy dz \quad (3.2.21)$$

となるから、 $\Sigma$  上での  $\mathbf{V}$  の面積分を求めるには

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_c^d \int_a^b V_x(x_0, y, z) dy dz \quad (3.2.22)$$

を計算すればよいことがわかる。たとえば、ベクトル場として

$$\mathbf{V} = xyz \mathbf{e}_x + x^2 y^2 z^2 \mathbf{e}_y + x^3 y^3 z^3 \mathbf{e}_z \quad (3.2.23)$$

を考えれば

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_c^d \int_a^b x_0 y z dy dz = \frac{1}{4} x_0 (b^2 - a^2) (d^2 - c^2) \quad (3.2.24)$$

となる。ここでは例として  $yz$  平面上の積分領域での面積分の求め方について説明したが、 $zx$  平面上の積分領域

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid c \leq x \leq d, y = y_0, a \leq z \leq b\} \quad (3.2.25)$$

での面積分を求めるには

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_c^d \int_a^b V_y(x, y_0, z) dz dx \quad (3.2.26)$$

を計算すればよい。また,  $xy$  平面上の積分領域

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, z = z_0\} \quad (3.2.27)$$

での面積分を求めるには

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_c^d \int_a^b V_z(x, y, z_0) dx dy \quad (3.2.28)$$

を計算すればよい。

### 一般の曲面上での面積分

ここでは積分領域が一般の曲面上にある場合を考える。まず, 曲面  $\Sigma$  をパラメータ表示する。つまり, パラメータ  $p, q$  を用いて

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q), \quad z = z(p, q) \quad (3.2.29)$$

のように  $\Sigma$  上の点  $(x(p, q), y(p, q), z(p, q))$  を表す。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は直交座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_x(p, q)\mathbf{e}_x + V_y(p, q)\mathbf{e}_y + V_z(p, q)\mathbf{e}_z \quad (3.2.30)$$

と表されたとする。ただし,  $V_x(x(p, q), y(p, q), z(p, q))$  などを簡単に  $V_x(p, q)$  などと書いた。このとき, 3.1 節で与えた面素ベクトルの表式 (3.1.3) において

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_q dp, & dy_1 &= \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)_q dp, & dz_1 &= \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_q dp \\ dx_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)_p dq, & dy_2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)_p dq, & dz_2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)_p dq \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

と選べば,  $\Sigma$  上の面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = \left\{ \frac{\partial(y, z)}{\partial(p, q)} \mathbf{e}_x + \frac{\partial(z, x)}{\partial(p, q)} \mathbf{e}_y + \frac{\partial(x, y)}{\partial(p, q)} \mathbf{e}_z \right\} dp dq \quad (3.2.32)$$

と表される。ここで, ヤコビアン

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_q & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q}\right)_p \\ \left(\frac{\partial \beta}{\partial p}\right)_q & \left(\frac{\partial \beta}{\partial q}\right)_p \end{vmatrix} \quad (3.2.33)$$

を用いた。したがって、 $\Sigma$ 上の点 $(x(p, q), y(p, q), z(p, q))$ における $\mathbf{V}$ と $d\mathbf{S}$ の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \left\{ V_x(p, q) \frac{\partial(y, z)}{\partial(p, q)} + V_y(p, q) \frac{\partial(z, x)}{\partial(p, q)} + V_z(p, q) \frac{\partial(x, y)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq \quad (3.2.34)$$

となるから、 $\mathbf{V}$ の $\Sigma$ 上での面積分を求めるには

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ V_x(p, q) \frac{\partial(y, z)}{\partial(p, q)} + V_y(p, q) \frac{\partial(z, x)}{\partial(p, q)} + V_z(p, q) \frac{\partial(x, y)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

を計算すればよいことがわかる。

## 体積分

空間の領域 $\Omega$ におけるスカラー場 $f$ の体積分を考える。3.1節で求めたように、直交座標における体積要素は(3.1.9)によって与えられる。したがって、直交座標によって体積分を求めるには

$$\iiint_{\Omega} f dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \quad (3.2.36)$$

を計算すればよい。

## 3.3 勾配・回転・発散

### 勾配

直交座標 $(x, y, z)$ における $\nabla f$ の表式は

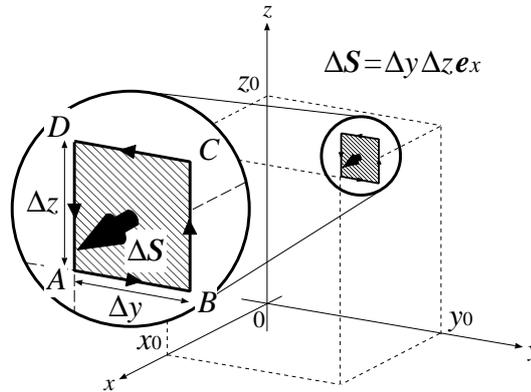
$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{yz} \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{zx} \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{xy} \mathbf{e}_z \quad (3.3.1)$$

である。(3.3.1)の導出はこの項目の最後で行う。この表式の $f$ として $x, y, z$ を考えると

$$\nabla x = \mathbf{e}_x, \quad \nabla y = \mathbf{e}_y, \quad \nabla z = \mathbf{e}_z \quad (3.3.2)$$

を得る。したがって、勾配についての連鎖律

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{yz} \nabla x + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{zx} \nabla y + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{xy} \nabla z \quad (3.3.3)$$



$$A=(x_0, y_0, z_0) \quad B=(x_0, y_0+\Delta y, z_0)$$

$$C=(x_0, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) \quad D=(x_0, y_0, z_0+\Delta z)$$

図 3.5: 直交座標における回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  の  $x$  成分を求めるための積分領域

が成り立つことがわかる。さて、直交座標における  $\nabla f$  の表式 (3.3.1) を導こう。直交座標  $(x, y, z)$  を用いると

$$\nabla f \cdot d\mathbf{r} = dx \nabla f \cdot \mathbf{e}_x + dy \nabla f \cdot \mathbf{e}_y + dz \nabla f \cdot \mathbf{e}_z \quad (3.3.4)$$

と書ける。これを  $f$  の全微分の表式

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{yz} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{zx} dy + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{xy} dz \quad (3.3.5)$$

とくらべると、たとえば、 $x$  について

$$\nabla f \cdot \mathbf{e}_x = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{yz} \quad (3.3.6)$$

であることがわかる。したがって、 $y, z$  についても同様に考えると、直交座標における  $\nabla f$  の表式として (3.3.1) が得られる。

## 回転

直交座標  $(x, y, z)$  における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \left\{ \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)_{zx} - \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)_{xy} \right\} \mathbf{e}_x \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)_{xy} - \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{yz} \right\} \mathbf{e}_y \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)_{yz} - \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{zx} \right\} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

である。(3.3.7)の導出はこの項目の最後で行う。これを

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (3.3.8)$$

と書くと覚えやすい。なお、この表式と勾配  $\nabla f$  の直交座標における表式 (3.3.1) からも  $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ , つまり、保存場は渦なしであることがわかる。ベクトル場  $\mathbf{V}$  が保存場であるとき、スカラー場  $f$  を

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{x_0}^x V_x(x', y_0, z_0) dx' \\ &+ \int_{y_0}^y V_y(x, y', z_0) dy' + \int_{z_0}^z V_z(x, y, z') dz' \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

によって定義すると、 $\mathbf{V}$  は  $\mathbf{V} = \nabla f$  として与えられる。さて、直交座標における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式 (3.3.7) を導こう。そのために、定義 (2.4.4) の  $\sigma$  として図 3.5 に示す

$$\begin{aligned} \gamma_1 : A \rightarrow B, & \quad \gamma_2 : B \rightarrow C, \\ \gamma_3 : C \rightarrow D, & \quad \gamma_4 : D \rightarrow A \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

を4つの辺とする微小曲面を考える。このとき、 $\sigma$  の境界は  $\partial\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$  と表せる。まず、 $\gamma_1, \gamma_3$  に沿う線積分をあわせて考える。このとき、 $\gamma_1$  においては  $t = \mathbf{e}_y$  であるのに対し、 $\gamma_3$  においては  $t = -\mathbf{e}_y$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \{V_y(x_0, y, z_0) - V_y(x_0, y, z_0 + \Delta z)\} dy \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

と書ける。さらに、 $V_y(x_0, y, z_0 + \Delta z)$  を  $\Delta z$  についてテイラー展開し2次以上の項を無視すると

$$V_y(x_0, y, z_0 + \Delta z) = V_y(x_0, y, z_0) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z_0}\right)_{x_0 y} \Delta z \quad (3.3.12)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z_0}\right)_{x_0 y} \Delta z dy \\ &= - \left(\frac{\partial V_y}{\partial z_0}\right)_{x_0 y_0} \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

となる。ただし、2番目の等式においては $\Delta y$ が微小量であることから被積分関数を $y = y_0$ における値で置き換えて積分を評価した。次に、 $\gamma_2, \gamma_4$ に沿う線積分をあわせて考える。このとき、 $\gamma_2$ においては $\mathbf{t} = \mathbf{e}_z$ であるのに対し、 $\gamma_4$ においては $\mathbf{t} = -\mathbf{e}_z$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \{V_z(x_0, y_0 + \Delta y, z) - V_z(x_0, y_0, z)\} dz \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

と書ける。さらに、 $V_z(x_0, y_0 + \Delta y, z)$ を $\Delta y$ についてテイラー展開し2次以上の項を無視すると

$$V_z(x_0, y_0 + \Delta y, z) = V_z(x_0, y_0, z) + \left( \frac{\partial V_z}{\partial y_0} \right)_{z x_0} \Delta y \quad (3.3.15)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y_0} \right)_{z x_0} \Delta y dz \\ &= \left( \frac{\partial V_z}{\partial y_0} \right)_{z_0 x_0} \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

となる。ただし、2番目の等式においては $\Delta z$ が微小量であることから被積分関数を $z = z_0$ における値で置き換えて積分を評価した。以上から、微小曲面 $\sigma$ の境界 $\partial\sigma$ に沿う線積分は

$$\int_{\partial\sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ \left( \frac{\partial V_z}{\partial y_0} \right)_{z_0 x_0} - \left( \frac{\partial V_y}{\partial z_0} \right)_{x_0 y_0} \right\} \Delta y \Delta z \quad (3.3.17)$$

と書けることがわかる。一方、この微小曲面 $\sigma$ については $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ 、 $\Delta S = \Delta y \Delta z$ であるから、(2.4.5)によって、

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_x = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y_0} \right)_{z_0 x_0} - \left( \frac{\partial V_y}{\partial z_0} \right)_{x_0 y_0} \quad (3.3.18)$$

が得られる。したがって、 $(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_y$ 、 $(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_z$ についても同様に考え、 $x_0, y_0, z_0$ をあらためて $x, y, z$ とおくと、直交座標における $\nabla \times \mathbf{V}$ の表式として(3.3.7)が得られる。

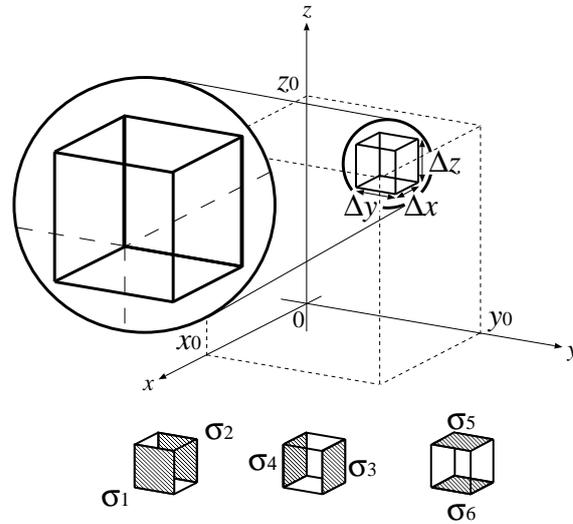


図 3.6: 直交座標における発散  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式を求めるための積分領域

## 発散

直交座標  $(x, y, z)$  における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式は

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)_{yz} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)_{zx} + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)_{xy} \quad (3.3.19)$$

である。(3.3.19) の導出はこの項目の最後で行う。この表式と回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  の直交座標における表式 (3.3.7) から重要な性質として

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (3.3.20)$$

が成り立つことがわかる。つまり、ベクトル場の回転は湧き出しなしである。さて、直交座標における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式 (3.3.19) を導こう。そのために、定義 (2.4.7) の  $\omega$  として図 3.6 に示す

$$\begin{aligned} \sigma_1 : (x_0 + \Delta x, \quad y \quad, \quad z \quad) & \quad \sigma_2 : (x_0, y, z) \\ \sigma_3 : (\quad x \quad, y_0 + \Delta y, \quad z \quad) & \quad \sigma_4 : (x, y_0, z) \\ \sigma_5 : (\quad x \quad, \quad y \quad, z_0 + \Delta z) & \quad \sigma_6 : (x, y, z_0) \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, \quad y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y, \quad z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z$$

を 6 つの側面とする微小領域を考える。このとき、 $\omega$  の境界は  $\partial\omega = \sigma_1 + \cdots + \sigma_6$  と表せる。まず、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  の上での面積分をあわせて考える。このとき、 $\sigma_1$  におい

ては  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$  であるのに対し、 $\sigma_2$  においては  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\sigma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \{V_x(x_0 + \Delta x, y, z) - V_x(x_0, y, z)\} dy dz \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

と書ける。さらに、 $V_x(x_0 + \Delta x, y, z)$  を  $\Delta x$  についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$V_x(x_0 + \Delta x, y, z) = V_x(x_0, y, z) + \left( \frac{\partial V_x}{\partial x_0} \right)_{yz} \Delta x \quad (3.3.23)$$

であるから

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\sigma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x_0} \right)_{yz} \Delta x dy dz \\ &= \left( \frac{\partial V_x}{\partial x_0} \right)_{y_0 z_0} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

となる。ただし、2 番目の等式においては  $\Delta y$ 、 $\Delta z$  が微小量であることから被積分関数を  $y = y_0$ 、 $z = z_0$  における値で置き換えて積分を評価した。 $\sigma_3$  と  $\sigma_4$ 、 $\sigma_5$  と  $\sigma_6$  の上での面積分についても同様に考えると

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \left\{ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x_0} \right)_{y_0 z_0} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y_0} \right)_{z_0 x_0} + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z_0} \right)_{x_0 y_0} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

となる。一方、 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  であるから、 $x_0$ 、 $y_0$ 、 $z_0$  をあらためて  $x$ 、 $y$ 、 $z$  とおくと、直交座標における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式として (3.3.19) が得られる。

## ラプラシアン

直交座標におけるラプラシアンの具体的な表式は

$$\nabla^2 f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{yz} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{zx} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{xy} \quad (3.3.26)$$

である。なお、ベクトル場  $\mathbf{V}$  について重要な公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V} \quad (3.3.27)$$

が成り立つ。

### 3.4 積の微分公式

勾配, 回転, 発散について以下の積の微分公式が成り立つ。

$$\begin{aligned}(1) \quad \nabla(fg) &= (\nabla f)g + f\nabla g \\(2) \quad \nabla \times (f\mathbf{V}) &= \nabla f \times \mathbf{V} + f\nabla \times \mathbf{V} \\(3) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{V}) &= \nabla f \cdot \mathbf{V} + f\nabla \cdot \mathbf{V} \\(4) \quad \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{U}) &= \mathbf{U} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) - \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) \\(5) \quad \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}) &= (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{U} \\&\quad + \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{U}) \\(6) \quad \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{U}) &= (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{U} \\&\quad + \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mathbf{U}(\nabla \cdot \mathbf{V})\end{aligned} \tag{3.4.1}$$



## 第4章 球座標

### 4.1 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素

#### 線素ベクトル

球座標では図 4.1 に示すように  $r, \theta, \varphi$  の値を 1 組与えることによって空間の点  $(r, \theta, \varphi)$  を指定する。ここで、 $r, \theta, \varphi$  の動く範囲は  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$  である。このとき、 $\theta, \varphi$  が一定の曲線、 $\varphi, r$  が一定の曲線、 $r, \theta$  が一定の曲線をそれぞれ  $r$  曲線、 $\theta$  曲線、 $\varphi$  曲線といい、これらを総称して座標曲線とよぶ。また、 $r$  が一定の曲面、 $\theta$  が一定の曲面、 $\varphi$  が一定の曲面をそれぞれ  $\theta\varphi$  曲面、 $\varphi r$  曲面、 $r\theta$  曲面といい、これらを総称して座標曲面とよぶ。与えられた  $r, \theta, \varphi$  の値について  $r$  曲線、 $\theta$  曲線、 $\varphi$  曲線を描くと、これら 3 つの曲線は点  $(r, \theta, \varphi)$  で交わることになる。さらに、 $r$  曲線、 $\theta$  曲線、 $\varphi$  曲線の正の向きを向く単位ベクトル  $e_r, e_\theta, e_\varphi$  をこの点における正規直交基底として採用する。直交座標の場合と異なり、球座標の場合には空間の各点に付随する正規直交基底  $e_r, e_\theta, e_\varphi$  を他の点に付随する正規直交基底  $e_r, e_\theta, e_\varphi$  に平行移動のみによって重ねることは必ずしもできないという点に注意する必要がある。このため、球座標を用いて場の微分を行うと計算が複雑になることがある。なお、本来ならば点  $(r, \theta, \varphi)$  に付随する正規直交基底であることを明示するために  $e_r(r, \theta, \varphi), e_\theta(r, \theta, \varphi), e_\varphi(r, \theta, \varphi)$  のように表すのがより正確であるが、 $(r, \theta, \varphi)$  を省略して単に  $e_r, e_\theta, e_\varphi$  と記すことが多いので注意する必要がある。さて、図 4.2 に示すように点  $(r, \theta, \varphi)$  における線素ベクトル  $d\mathbf{r}$  は点  $(r, \theta, \varphi)$  と点  $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$  を結ぶ微小変位であり、

$$d\mathbf{r} = h_r dr \mathbf{e}_r + h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta + h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (4.1.1)$$

と表される。ここでスケール因子  $h_r, h_\theta, h_\varphi$  を

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta \quad (4.1.2)$$

と定義した。スケール因子も変数  $r, \theta, \varphi$  の関数であるので、本来ならばこのことを明示するために  $h_r(r, \theta, \varphi), h_\theta(r, \theta, \varphi), h_\varphi(r, \theta, \varphi)$  のように表すのがより正確

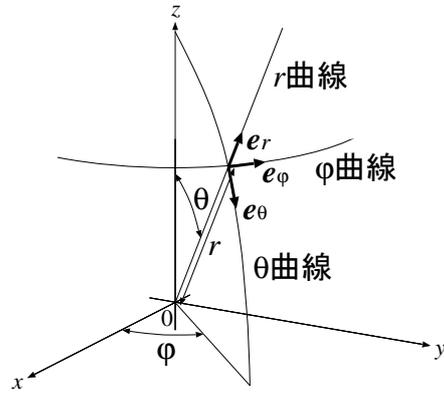
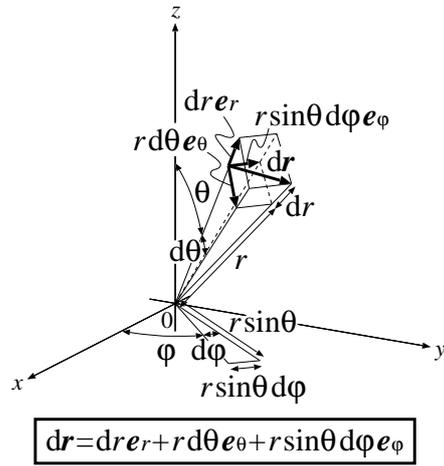


図 4.1: 球座標



$$\mathbf{dr} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \mathbf{e}_\phi$$

図 4.2: 球座標における線素ベクトル

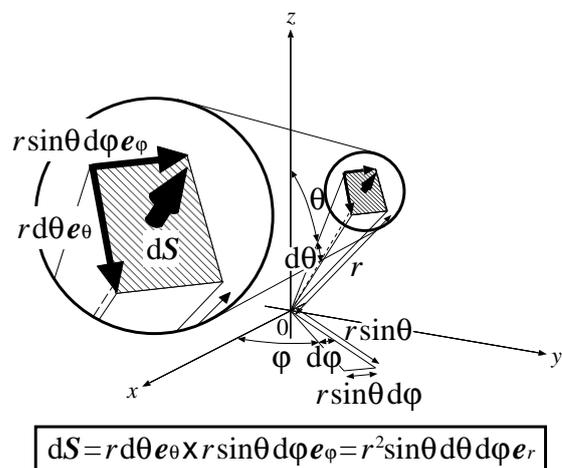


図 4.3: 球座標における面素ベクトル ( $\theta\phi$  曲面の場合)

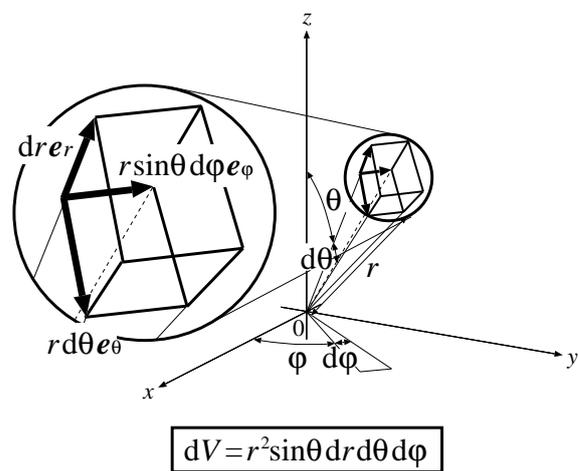


図 4.4: 球座標における体積要素

であるが、変数を省略して単に  $h_r, h_\theta, h_\varphi$  と記すことが多いので注意する必要がある。

## 面素ベクトル

点  $(r, \theta, \varphi)$  における2つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= h_r dr_1 \mathbf{e}_r + h_\theta d\theta_1 \mathbf{e}_\theta + h_\varphi d\varphi_1 \mathbf{e}_\varphi \\ d\mathbf{r}_2 &= h_r dr_2 \mathbf{e}_r + h_\theta d\theta_2 \mathbf{e}_\theta + h_\varphi d\varphi_2 \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

からつくられる面素ベクトルは

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 \\ &= h_\theta h_\varphi \begin{vmatrix} d\theta_1 & d\varphi_1 \\ d\theta_2 & d\varphi_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_r + h_\varphi h_r \begin{vmatrix} d\varphi_1 & dr_1 \\ d\varphi_2 & dr_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_\theta + h_r h_\theta \begin{vmatrix} dr_1 & d\theta_1 \\ dr_2 & d\theta_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

と表される。座標曲面の場合を考えるとこの表式は特に簡単なものとなる。ここでは  $\theta\varphi$  曲面を例として取り上げ、その上の面素ベクトルについて説明する。ただし、 $\theta\varphi$  曲面の表を  $r$  曲線の正の向きにとることにする。 $d\theta, d\varphi$  は正であるとして図 4.3 に示す2つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta = r d\theta \mathbf{e}_\theta \\ d\mathbf{r}_2 &= h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi = r \sin\theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

を考えよう。これら2つの線素ベクトルから  $\theta\varphi$  曲面上の面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta \times h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi = h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi \mathbf{e}_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r \quad (4.1.6)$$

となることがわかる。つまり、 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  と書けば  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ,  $dS = h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$  である。同様に考えて、 $\varphi r$  曲面上の面素ベクトルは、曲面の表を  $\theta$  曲線の正の向きにとれば、

$$d\mathbf{S} = h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi \times h_r dr \mathbf{e}_r = h_\varphi h_r d\varphi dr \mathbf{e}_\theta = r \sin\theta d\varphi dr \mathbf{e}_\theta \quad (4.1.7)$$

であり、また、 $r\theta$  曲面上の面素ベクトルは、曲面の表を  $\varphi$  曲線の正の向きにとれば、

$$d\mathbf{S} = h_r dr \mathbf{e}_r \times h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta = h_r h_\theta dr d\theta \mathbf{e}_\varphi = r dr d\theta \mathbf{e}_\varphi \quad (4.1.8)$$

である。ただし、 $dr, d\theta, d\varphi$  はすべて正であると考えよう。

## 体積要素

図 4.4 に示すように、 $dr, d\theta, d\varphi$  はすべて正であるとして点  $(r, \theta, \varphi)$  における3

つの線素ベクトル

$$\begin{aligned}d\mathbf{r}_1 &= h_r dr \mathbf{e}_r = dr \mathbf{e}_r \\d\mathbf{r}_2 &= h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta = r d\theta \mathbf{e}_\theta \\d\mathbf{r}_3 &= h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi = r \sin\theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

を考えると、球座標における体積要素は

$$\begin{aligned}dV &= d\mathbf{r}_1 \cdot (d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3) = h_r dr \mathbf{e}_r \cdot (h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta \times h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi) \\&= h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi\end{aligned}\tag{4.1.10}$$

と表される。

## 4.2 線積分・面積分・体積分

### 座標曲線に沿う線積分

球座標の座標曲線に沿う線積分の求め方について説明しよう。そのために、例として  $r$  曲線に沿う線積分を考える。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は球座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_r(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + V_\theta(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + V_\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi\tag{4.2.1}$$

と表されるとする。また、積分経路として

$$\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) \mid a \leq r \leq b, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0\}\tag{4.2.2}$$

を考えよう。ただし、 $\Gamma$  は点  $(a, \theta_0, \varphi_0)$  から点  $(b, \theta_0, \varphi_0)$  へと向きづけられているとする。 $\Gamma$  上では  $\theta, \varphi$  は一定、つまり、 $d\theta = 0, d\varphi = 0$  であるから、 $\Gamma$  に沿う線素ベクトルは

$$d\mathbf{r} = h_r dr \mathbf{e}_r\tag{4.2.3}$$

と表される。したがって、 $\Gamma$  上の点  $(r, \theta_0, \varphi_0)$  における  $\mathbf{V}$  と  $d\mathbf{r}$  の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = V_r(r, \theta_0, \varphi_0)h_r(r, \theta_0, \varphi_0) dr\tag{4.2.4}$$

となるから、 $\Gamma$  に沿う  $\mathbf{V}$  の線積分を求めるには

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b V_r(r, \theta_0, \varphi_0)h_r(r, \theta_0, \varphi_0) dr \\&= \int_a^b V_r(r, \theta_0, \varphi_0) dr\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

を計算すればよいことがわかる。たとえば、ベクトル場として

$$\mathbf{V} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + r^2 \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + r^3 \tan \theta \tan \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (4.2.6)$$

を考えれば

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b r \cos \theta_0 \cos \varphi_0 dr = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \quad (4.2.7)$$

となる。ここでは例として  $r$  曲線上の積分経路に沿う線積分の求め方について説明したが、 $\theta$  曲線上の積分経路

$$\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) \mid r = r_0, a \leq \theta \leq b, \varphi = \varphi_0\} \quad (4.2.8)$$

に沿う線積分を求めるには

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b V_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) h_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) d\theta \\ &= \int_a^b V_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) r_0 d\theta \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

を計算すればよい。また、 $\varphi$  曲線上の積分経路

$$\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) \mid r = r_0, \theta = \theta_0, a \leq \varphi \leq b\} \quad (4.2.10)$$

に沿う線積分を求めるには

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b V_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi) h_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi) d\varphi \\ &= \int_a^b V_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi) r_0 \sin \theta_0 d\varphi \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

を計算すればよい。

### 一般の曲線に沿う線積分

ここでは積分経路が一般の曲線上にある場合を考える。まず、曲線  $\Gamma$  をパラメータ表示する。つまり、パラメータ  $p$  用いて

$$r = r(p), \quad \theta = \theta(p), \quad \varphi = \varphi(p) \quad (4.2.12)$$

のように  $\Gamma$  上の点  $(r(p), \theta(p), \varphi(p))$  を表す。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は球座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_r(p)\mathbf{e}_r + V_\theta(p)\mathbf{e}_\theta + V_\varphi(p)\mathbf{e}_\varphi \quad (4.2.13)$$

と表されるとする。ただし、 $V_r(r(p), \theta(p), \varphi(p))$ などを簡単に $V_r(p)$ など書いた。このとき、

$$dr = \frac{dr}{dp} dp, \quad d\theta = \frac{d\theta}{dp} dp, \quad d\varphi = \frac{d\varphi}{dp} dp \quad (4.2.14)$$

であるから、 $\Gamma$ に沿う線素ベクトルは

$$d\mathbf{r} = \left\{ h_r(p) \frac{dr}{dp} \mathbf{e}_r + h_\theta(p) \frac{d\theta}{dp} \mathbf{e}_\theta + h_\varphi(p) \frac{d\varphi}{dp} \mathbf{e}_\varphi \right\} dp \quad (4.2.15)$$

と表される。ただし、 $h_r(r(p), \theta(p), \varphi(p))$ などを簡単に $h_r(p)$ など書いた。したがって、 $\Gamma$ 上の点 $(r(p), \theta(p), \varphi(p))$ における $\mathbf{V}$ と $d\mathbf{r}$ の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ V_r(p) h_r(p) \frac{dr}{dp} + V_\theta(p) h_\theta(p) \frac{d\theta}{dp} + V_\varphi(p) h_\varphi(p) \frac{d\varphi}{dp} \right\} dp \quad (4.2.16)$$

となるから、 $\Gamma$ に沿う $\mathbf{V}$ の線積分を求めるには

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma} \left\{ V_r(p) h_r(p) \frac{dr}{dp} + V_\theta(p) h_\theta(p) \frac{d\theta}{dp} + V_\varphi(p) h_\varphi(p) \frac{d\varphi}{dp} \right\} dp \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ V_r(p) \frac{dr}{dp} + V_\theta(p) r(p) \frac{d\theta}{dp} + V_\varphi(p) r(p) \sin \theta(p) \frac{d\varphi}{dp} \right\} dp \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

を計算すればよいことがわかる。

## 座標曲面上での面積分

球座標の座標曲面上での面積分の求め方について説明しよう。そのために例として $\theta\varphi$ 曲面上での面積分を考える。ベクトル場 $\mathbf{V}$ は球座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_r(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_r + V_\theta(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta + V_\varphi(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \quad (4.2.18)$$

と表されるとする。また、積分領域として

$$\Sigma = \{(r, \theta, \varphi) \mid r = r_0, a \leq \theta \leq b, c \leq \varphi \leq d\} \quad (4.2.19)$$

を考えよう。ただし、 $\Sigma$ は $r$ 曲線の正の向きに向きづけられているとする。4.1節で(4.1.6)として求めたように、 $\theta\varphi$ 曲面上の面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi \mathbf{e}_r \quad (4.2.20)$$

である。したがって、 $\Sigma$ 上の点 $(r_0, \theta, \varphi)$ における $\mathbf{V}$ と $d\mathbf{S}$ の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = V_r(r_0, \theta, \varphi) h_\theta(r_0, \theta, \varphi) h_\varphi(r_0, \theta, \varphi) d\theta d\varphi \quad (4.2.21)$$

となるから、 $\Sigma$  上での  $\mathbf{V}$  の面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b V_r(r_0, \theta, \varphi) h_{\theta}(r_0, \theta, \varphi) h_{\varphi}(r_0, \theta, \varphi) d\theta d\varphi \\ &= \int_c^d \int_a^b V_r(r_0, \theta, \varphi) r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

を計算すればよいことがわかる。たとえば、ベクトル場として

$$\mathbf{V} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + r^2 \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_{\theta} + r^3 \tan \theta \tan \varphi \mathbf{e}_{\varphi}\tag{4.2.23}$$

を考えれば

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b r_0^3 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{2} r_0^3 (\cos^2 a - \cos^2 b) (\sin d - \sin c)\end{aligned}\tag{4.2.24}$$

となる。ここでは例として  $\theta\varphi$  曲面上の積分領域での面積分の求め方について説明したが、 $\varphi r$  曲面上の積分領域

$$\Sigma = \{(r, \theta, \varphi) \mid c \leq r \leq d, \theta = \theta_0, a \leq \varphi \leq b\}\tag{4.2.25}$$

での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b V_{\theta}(r, \theta_0, \varphi) h_{\varphi}(r, \theta_0, \varphi) h_r(r, \theta_0, \varphi) d\varphi dr \\ &= \int_c^d \int_a^b V_{\theta}(r, \theta_0, \varphi) r \sin \theta_0 d\varphi dr\end{aligned}\tag{4.2.26}$$

を計算すればよい。また、 $r\theta$  曲面上の積分領域

$$\Sigma = \{(r, \theta, \varphi) \mid a \leq r \leq b, c \leq \theta \leq d, \varphi = \varphi_0\}\tag{4.2.27}$$

での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b V_{\varphi}(r, \theta, \varphi_0) h_r(r, \theta, \varphi_0) h_{\theta}(r, \theta, \varphi_0) dr d\theta \\ &= \int_c^d \int_a^b V_{\varphi}(r, \theta, \varphi_0) r dr d\theta\end{aligned}\tag{4.2.28}$$

を計算すればよい。

### 一般の曲面上での面積分

ここでは積分領域が一般の曲面上にある場合を考える。まず、曲面  $\Sigma$  をパラメータ表示する。つまり、パラメータ  $p, q$  を用いて

$$r = r(p, q), \quad \theta = \theta(p, q), \quad \varphi = \varphi(p, q) \quad (4.2.29)$$

のように  $\Sigma$  上の点  $(r(p, q), \theta(p, q), \varphi(p, q))$  を表す。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は球座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_r(p, q)\mathbf{e}_r + V_\theta(p, q)\mathbf{e}_\theta + V_\varphi(p, q)\mathbf{e}_\varphi \quad (4.2.30)$$

と表されとする。ただし、 $V_r(r(p, q), \theta(p, q), \varphi(p, q))$ などを簡単に  $V_r(p, q)$  などと書いた。このとき、4.1節で与えた面素ベクトルの表式(4.1.4)において

$$\begin{aligned} dr_1 &= \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)_q dp, & d\theta_1 &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_q dp, & d\varphi_1 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_q dp \\ dr_2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)_p dq, & d\theta_2 &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial q}\right)_p dq, & d\varphi_2 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)_p dq \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

と選べば、 $\Sigma$ 上の面素ベクトルは

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} = \left\{ h_\theta(p, q)h_\varphi(p, q)\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(p, q)}\mathbf{e}_r + h_\varphi(p, q)h_r(p, q)\frac{\partial(\varphi, r)}{\partial(p, q)}\mathbf{e}_\theta \right. \\ \left. + h_r(p, q)h_\theta(p, q)\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(p, q)}\mathbf{e}_\varphi \right\} dp dq \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

と表される。ただし、 $h_r(r(p, q), \theta(p, q), \varphi(p, q))$ などを簡単に  $h_r(p, q)$  などと書いた。また、ヤコビアン

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_q & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q}\right)_p \\ \left(\frac{\partial \beta}{\partial p}\right)_q & \left(\frac{\partial \beta}{\partial q}\right)_p \end{vmatrix} \quad (4.2.33)$$

を用いた。したがって、 $\Sigma$ 上の点  $(r(p, q), \theta(p, q), \varphi(p, q))$ における  $\mathbf{V}$  と  $d\mathbf{S}$  の内積をとると

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \left\{ V_r(p, q)h_\theta(p, q)h_\varphi(p, q)\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(p, q)} \right. \\ \left. + V_\theta(p, q)h_\varphi(p, q)h_r(p, q)\frac{\partial(\varphi, r)}{\partial(p, q)} \right. \\ \left. + V_\varphi(p, q)h_r(p, q)h_\theta(p, q)\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

となるから、 $\mathbf{V}$  の  $\Sigma$  上での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma} \left\{ V_r(p, q) h_{\theta}(p, q) h_{\varphi}(p, q) \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(p, q)} \right. \\
 &\quad + V_{\theta}(p, q) h_{\varphi}(p, q) h_r(p, q) \frac{\partial(\varphi, r)}{\partial(p, q)} \\
 &\quad \left. + V_{\varphi}(p, q) h_r(p, q) h_{\theta}(p, q) \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq \\
 &= \iint_{\Sigma} \left\{ V_r(p, q) r^2(p, q) \sin \theta(p, q) \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(p, q)} \right. \\
 &\quad + V_{\theta}(p, q) r(p, q) \sin \theta(p, q) \frac{\partial(\varphi, r)}{\partial(p, q)} \\
 &\quad \left. + V_{\varphi}(p, q) r(p, q) \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq
 \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

を計算すればよいことがわかる。

## 体積分

空間の領域  $\Omega$  におけるスカラー場  $f$  の体積分を考える。4.1 節で求めたように、球座標における体積要素は (4.1.10) によって与えられる。したがって、球座標によって体積分を求めるには

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} f dV &= \iiint_{\Omega} f(r, \theta, \varphi) h_r(r, \theta, \varphi) h_{\theta}(r, \theta, \varphi) h_{\varphi}(r, \theta, \varphi) dr d\theta d\varphi \\
 &= \iiint_{\Omega} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi
 \end{aligned} \tag{4.2.36}$$

を計算すればよい。

## 4.3 勾配・回転・発散

### 勾配

球座標  $(r, \theta, \varphi)$  における  $\nabla f$  の表式は

$$\nabla f = \frac{1}{h_r} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \mathbf{e}_r + \frac{1}{h_{\theta}} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} \mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{h_{\varphi}} \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \mathbf{e}_{\varphi} \tag{4.3.1}$$

すなわち

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} \mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \mathbf{e}_{\varphi} \tag{4.3.2}$$

である。(4.3.1)の導出はこの項目の最後で行う。この表式の  $f$  として  $r, \theta, \varphi$  を考えると

$$\nabla r = \frac{\mathbf{e}_r}{h_r}, \quad \nabla \theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{h_\theta}, \quad \nabla \varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{h_\varphi} \quad (4.3.3)$$

を得る。したがって、勾配についての連鎖律

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \nabla r + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} \nabla \theta + \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \nabla \varphi \quad (4.3.4)$$

が成り立つことがわかる。さて、球座標における  $\nabla f$  の表式 (4.3.1) を導こう。球座標  $(r, \theta, \varphi)$  を用いると

$$\nabla f \cdot d\mathbf{r} = h_r dr \nabla f \cdot \mathbf{e}_r + h_\theta d\theta \nabla f \cdot \mathbf{e}_\theta + h_\varphi d\varphi \nabla f \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad (4.3.5)$$

と書ける。これを  $f$  の全微分の表式

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} dr + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} d\theta + \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} d\varphi \quad (4.3.6)$$

とくらべると、たとえば、 $r$  について

$$\nabla f \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{h_r} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \quad (4.3.7)$$

であることがわかる。したがって、 $\theta, \varphi$  についても同様に考えると、球座標における  $\nabla f$  の表式として (4.3.1) が得られる。

## 回転

球座標  $(r, \theta, \varphi)$  における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{h_\theta h_\varphi} \left\{ \left( \frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} - \left( \frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \right\} \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{h_\varphi h_r} \left\{ \left( \frac{\partial V_r h_r}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} - \left( \frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \right\} \mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{h_r h_\theta} \left\{ \left( \frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} - \left( \frac{\partial V_r h_r}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} \right\} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

すなわち

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \left( \frac{\partial V_\varphi r \sin \theta}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} - \left( \frac{\partial V_\theta r}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \right\} \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \left( \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} - \left( \frac{\partial V_\varphi r \sin \theta}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \right\} \mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left\{ \left( \frac{\partial V_\theta r}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} - \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} \right\} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\quad (4.3.9)$$

である。(4.3.8)の導出はこの項目の最後で行う。これを

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\varphi \\ h_\theta h_\varphi & h_\varphi h_r & h_r h_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r h_r & V_\theta h_\theta & V_\varphi h_\varphi \end{vmatrix}\quad (4.3.10)$$

と書くと覚えやすい。なお、この表式と勾配  $\nabla f$  の球座標における表式(4.3.1)からも  $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ 、つまり、保存場は渦なしであることがわかる。ベクトル場  $\mathbf{V}$  が保存場であるとき、スカラー場  $f$  を

$$\begin{aligned}f(r, \theta, \varphi) &= \int_{r_0}^r V_r(r', \theta_0, \varphi_0) h_r(r', \theta_0, \varphi_0) dr' \\ &+ \int_{\theta_0}^\theta V_\theta(r, \theta', \varphi_0) h_\theta(r, \theta', \varphi_0) d\theta' + \int_{\varphi_0}^\varphi V_\varphi(r, \theta, \varphi') h_\varphi(r, \theta, \varphi') d\varphi'\end{aligned}\quad (4.3.11)$$

によって定義すると、 $\mathbf{V}$  は  $\mathbf{V} = \nabla f$  として与えられる。さて、球座標における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式(4.3.8)を導こう。そのために、定義(2.4.4)の  $\sigma$  として図4.5に示す

$$\begin{aligned}\gamma_1 : A &\rightarrow B, & \gamma_2 : B &\rightarrow C, \\ \gamma_3 : C &\rightarrow D, & \gamma_4 : D &\rightarrow A\end{aligned}\quad (4.3.12)$$

を4つの辺とする微小曲面を考える。このとき、 $\sigma$ の境界は  $\partial\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$  と表せる。まず、 $\gamma_1, \gamma_3$  に沿う線積分をあわせて考える。このとき、 $\gamma_1$  においては  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_\theta$  であるのに対し、 $\gamma_3$  においては  $\mathbf{t} = -\mathbf{e}_\theta$  であることに注意すると

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \{v_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) - v_\theta(r_0, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi)\} d\theta\end{aligned}\quad (4.3.13)$$

と書ける。ここで、 $v_\theta = V_\theta h_\theta$ とおいた。さらに、 $v_\theta(r_0, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi)$ を $\Delta\varphi$ についてテイラー展開し2次以上の項を無視すると

$$v_\theta(r_0, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) = v_\theta(r_0, \theta, \varphi_0) + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi_0} \right)_{r_0\theta} \Delta\varphi \quad (4.3.14)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi_0} \right)_{r_0\theta} \Delta\varphi d\theta \\ &= - \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi_0} \right)_{r_0\theta_0} \Delta\theta \Delta\varphi = - \left( \frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial \varphi_0} \right)_{r_0\theta_0} \Delta\theta \Delta\varphi \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

となる。ただし、2番目の等式においては $\Delta\theta$ が微小量であることから被積分関数を $\theta = \theta_0$ における値で置き換えて積分を評価した。次に、 $\gamma_2$ ,  $\gamma_4$ に沿う線積分をあわせて考える。このとき、 $\gamma_2$ においては $\mathbf{t} = \mathbf{e}_\varphi$ であるのに対し、 $\gamma_4$ においては $\mathbf{t} = -\mathbf{e}_\varphi$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \{v_\varphi(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi) - v_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi)\} d\varphi \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

と書ける。ここで、 $v_\varphi = V_\varphi h_\varphi$ とおいた。さらに、 $v_\varphi(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi)$ を $\Delta\theta$ についてテイラー展開し2次以上の項を無視すると

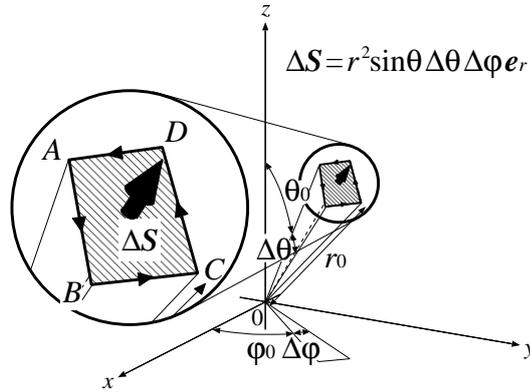
$$v_\varphi(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi) = v_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi) + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta_0} \right)_{\varphi r_0} \Delta\theta \quad (4.3.17)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta_0} \right)_{\varphi r_0} \Delta\theta d\varphi \\ &= \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta_0} \right)_{\varphi_0 r_0} \Delta\theta \Delta\varphi = \left( \frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial \theta_0} \right)_{\varphi_0 r_0} \Delta\theta \Delta\varphi \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

となる。ただし、2番目の等式においては $\Delta\varphi$ が微小量であることから被積分関数を $\varphi = \varphi_0$ における値で置き換えて積分を評価した。以上から、微小曲面 $\sigma$ の境界 $\partial\sigma$ に沿う線積分は

$$\int_{\partial\sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ \left( \frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial \theta_0} \right)_{\varphi_0 r_0} - \left( \frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial \varphi_0} \right)_{r_0 \theta_0} \right\} \Delta\theta \Delta\varphi \quad (4.3.19)$$



$$A=(r_0, \theta_0, \varphi_0) \quad B=(r_0, \theta_0+\Delta\theta, \varphi_0)$$

$$C=(r_0, \theta_0+\Delta\theta, \varphi_0+\Delta\varphi) \quad D=(r_0, \theta_0, \varphi_0+\Delta\varphi)$$

図 4.5: 球座標における回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  の  $r$  成分を求めるための積分領域

と書けることがわかる。一方、この微小曲面  $\sigma$  については  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ ,  $\Delta S = h_\theta h_\varphi \Delta\theta \Delta\varphi$  であるから、(2.4.5) によって、

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{h_\theta h_\varphi} \left\{ \left( \frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial \theta_0} \right)_{\varphi_0 r_0} - \left( \frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial \varphi_0} \right)_{r_0 \theta_0} \right\} \quad (4.3.20)$$

が得られる。したがって、 $(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_\theta$ ,  $(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_\varphi$  についても同様に考え、 $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  をあらためて  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  とおくと、球座標における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式として (4.3.8) が得られる。

## 発散

球座標  $(r, \theta, \varphi)$  における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式は

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left\{ \left( \frac{\partial V_r h_\theta h_\varphi}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} + \left( \frac{\partial V_\theta h_\varphi h_r}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \left( \frac{\partial V_\varphi h_r h_\theta}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \right\} \quad (4.3.21)$$

すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \left( \frac{\partial V_r r^2 \sin \theta}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} + \left( \frac{\partial V_\theta r \sin \theta}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \left( \frac{\partial V_\varphi r}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \right\} \quad (4.3.22)$$

である。(4.3.21) の導出はこの項目の最後で行う。この表式と回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  の球座標における表式 (4.3.8) から重要な性質として

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (4.3.23)$$

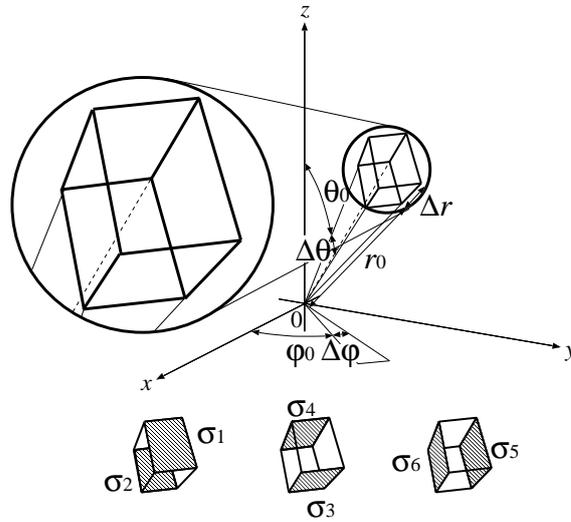


図 4.6: 球座標における発散  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式を求めるための積分領域

が成り立つことがわかる。つまり、ベクトル場の回転は湧き出しなしである。さて、球座標における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式 (4.3.21) を導こう。そのために、定義 (2.4.7) の  $\omega$  として図 4.6 に示す

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 : (r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) & \quad \sigma_2 : (r_0, \theta, \varphi) \\
 \sigma_3 : (r, \theta_0 + \Delta\theta, \varphi) & \quad \sigma_4 : (r, \theta_0, \varphi) \\
 \sigma_5 : (r, \theta, \varphi_0 + \Delta\varphi) & \quad \sigma_6 : (r, \theta, \varphi_0)
 \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

$$r_0 \leq r \leq r_0 + \Delta r, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \Delta\varphi$$

を 6 つの側面とする微小領域を考える。このとき、 $\omega$  の境界は  $\partial\omega = \sigma_1 + \dots + \sigma_6$  と表せる。まず、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  の上での面積分をあわせて考える。このとき、 $\sigma_1$  においては  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  であるのに対し、 $\sigma_2$  においては  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$  であることに注意すると

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\sigma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\sigma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \\
 & = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \{v_r(r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) - v_r(r_0, \theta, \varphi)\} d\theta d\varphi
 \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

と書ける。ここで、 $v_r = V_r h_\theta h_\varphi$  とおいた。さらに、 $v_r(r_0 + \Delta r, \theta, \varphi)$  を  $\Delta r$  についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$v_r(r_0 + \Delta r, \theta, \varphi) = v_r(r_0, \theta, \varphi) + \left( \frac{\partial v_r}{\partial r_0} \right)_{\theta\varphi} \Delta r \tag{4.3.26}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\sigma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r_0} \right)_{\theta\varphi} \Delta r d\theta d\varphi \\
&= \left( \frac{\partial v_r}{\partial r_0} \right)_{\theta_0\varphi_0} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi \\
&= \left( \frac{\partial V_r h_\theta h_\varphi}{\partial r_0} \right)_{\theta_0\varphi_0} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi
\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

となる。ただし、2番目の等式においては  $\Delta\theta$ 、 $\Delta\varphi$  が微小量であることから被積分関数を  $\theta = \theta_0$ 、 $\varphi = \varphi_0$  における値で置き換えて積分を評価した。 $\sigma_3$  と  $\sigma_4$ 、 $\sigma_5$  と  $\sigma_6$  の上での面積分についても同様に考えると

$$\begin{aligned}
&\iint_{\partial\omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \left\{ \left( \frac{\partial V_r h_\theta h_\varphi}{\partial r_0} \right)_{\theta_0\varphi_0} + \left( \frac{\partial V_\theta h_\varphi h_r}{\partial \theta_0} \right)_{\varphi_0 r_0} + \left( \frac{\partial V_\varphi h_r h_\theta}{\partial \varphi_0} \right)_{r_0\theta_0} \right\} \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

となる。一方、 $\Delta V = h_r h_\theta h_\varphi \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi$  であるから、 $r_0$ 、 $\theta_0$ 、 $\varphi_0$  をあらためて  $r$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$  とおくと、球座標における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式として (4.3.21) が得られる。

## ラプラシアン

球座標におけるラプラシアンの具体的な表式は

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{h_\theta h_\varphi}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{h_\varphi h_r}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{h_r h_\theta}{h_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \right\} \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right)_{r\theta}
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

である。

## 第5章 円柱座標

### 5.1 線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素

#### 線素ベクトル

円柱座標では図 5.1 に示すように  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  の値を 1 組与えることによって空間の点  $(\rho, \varphi, z)$  を指定する。ここで,  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  の動く範囲は  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$  である。このとき,  $\varphi$ ,  $z$  が一定の曲線,  $z$ ,  $\rho$  が一定の曲線,  $\rho$ ,  $\varphi$  が一定の曲線をそれぞれ  $\rho$  曲線,  $\varphi$  曲線,  $z$  曲線といい, 球座標の場合と同様にこれらを総称して座標曲線とよぶ。また,  $\rho$  が一定の曲面,  $\varphi$  が一定の曲面,  $z$  が一定の曲面をそれぞれ  $\varphi z$  曲面,  $z\rho$  曲面,  $\rho\varphi$  曲面といい, 球座標の場合と同様にこれらを総称して座標曲面とよぶ。与えられた  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  の値について  $\rho$  曲線,  $\varphi$  曲線,  $z$  曲線を描くと, これら 3 つの曲線は点  $(\rho, \varphi, z)$  で交わることになる。さらに,  $\rho$  曲線,  $\varphi$  曲線,  $z$  曲線の正の向きを向く単位ベクトル  $e_\rho$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_z$  をこの点における正規直交基底として採用する。球座標の場合と同様に, 円柱座標の場合にも空間の各点に付随する正規直交基底  $e_\rho$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_z$  を他の点に付随する正規直交基底  $e_\rho$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_z$  に平行移動のみによって重ねることは必ずしもできないという点に注意する必要がある。このため, 円柱座標を用いて場の微分を行うと計算が複雑になることがある。なお, 本来ならば点  $(\rho, \varphi, z)$  に付随する正規直交基底であることを明示するために  $e_\rho(\rho, \varphi, z)$ ,  $e_\varphi(\rho, \varphi, z)$ ,  $e_z(\rho, \varphi, z)$  のように表すのがより正確であるが,  $(\rho, \varphi, z)$  を省略して単に  $e_\rho$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_z$  と記すことが多いので注意する必要がある。さて, 図 5.2 に示すように点  $(\rho, \varphi, z)$  における線素ベクトル  $d\mathbf{r}$  は点  $(\rho, \varphi, z)$  と点  $(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi, z + dz)$  を結ぶ微小変位であり,

$$d\mathbf{r} = h_\rho d\rho \mathbf{e}_\rho + h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi + h_z dz \mathbf{e}_z \quad (5.1.1)$$

と表される。ここでスケール因子  $h_\rho$ ,  $h_\varphi$ ,  $h_z$  を

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1 \quad (5.1.2)$$

と定義した。スケール因子も変数  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  の関数であるので, 本来ならばこのことを明示するために  $h_\rho(\rho, \varphi, z)$ ,  $h_\varphi(\rho, \varphi, z)$ ,  $h_z(\rho, \varphi, z)$  のように表すのがより正確

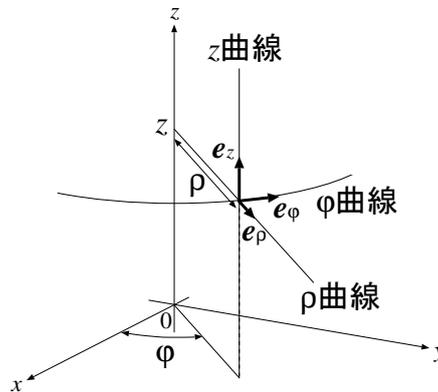


図 5.1: 円柱座標

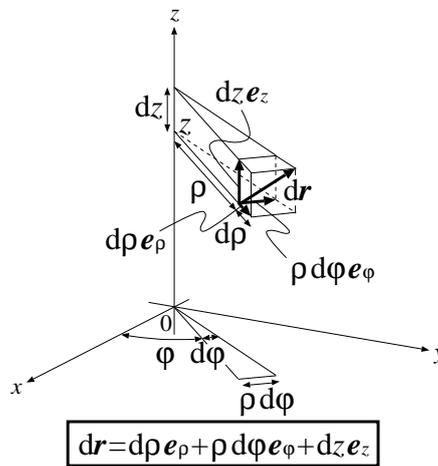


図 5.2: 円柱座標における線素ベクトル

であるが、変数を省略して単に  $h_\rho$ ,  $h_\varphi$ ,  $h_z$  と記すことが多いので注意する必要がある。

### 面素ベクトル

点  $(\rho, \varphi, z)$  における 2 つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= h_\rho d\rho_1 \mathbf{e}_\rho + h_\varphi d\varphi_1 \mathbf{e}_\varphi + h_z dz_1 \mathbf{e}_z \\ d\mathbf{r}_2 &= h_\rho d\rho_2 \mathbf{e}_\rho + h_\varphi d\varphi_2 \mathbf{e}_\varphi + h_z dz_2 \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

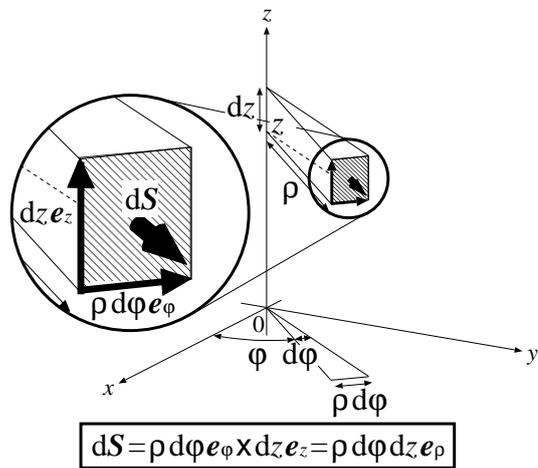


図 5.3: 円柱座標における面素ベクトル ( $\varphi z$  曲面の場合)

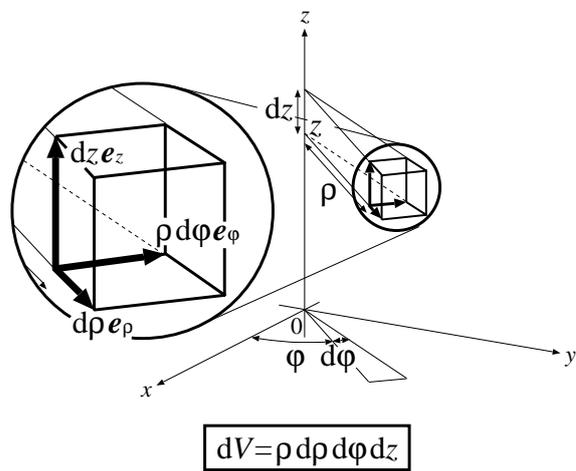


図 5.4: 円柱座標における体積要素

からつくられる面素ベクトルは

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 \\ &= h_\varphi h_z \begin{vmatrix} d\varphi_1 & dz_1 \\ d\varphi_2 & dz_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_\rho + h_z h_\rho \begin{vmatrix} dz_1 & d\rho_1 \\ dz_2 & d\rho_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_\varphi + h_\rho h_\varphi \begin{vmatrix} d\rho_1 & d\varphi_1 \\ d\rho_2 & d\varphi_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

と表される。座標曲面の場合を考えるとこの表式は特に簡単なものとなる。ここでは  $\varphi z$  曲面を例として取り上げ、その上の面素ベクトルについて説明する。ただし、 $\varphi z$  曲面の表を  $\rho$  曲線の正の向きにとることにする。 $d\varphi$ ,  $dz$  は正であるとして図 5.3 に示す 2 つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi = \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ d\mathbf{r}_2 &= h_z dz \mathbf{e}_z = dz \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

を考えよう。これら 2 つの線素ベクトルから  $\varphi z$  曲面上の面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi \times h_z dz \mathbf{e}_z = h_\varphi h_z d\varphi dz \mathbf{e}_\rho = \rho d\varphi dz \mathbf{e}_\rho \quad (5.1.6)$$

となることがわかる。つまり、 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  と書けば  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ ,  $dS = h_\varphi h_z d\varphi dz = \rho d\varphi dz$  である。同様に考えて、 $z\rho$  曲面上の面素ベクトルは、曲面の表を  $\varphi$  曲線の正の向きにとれば、

$$d\mathbf{S} = h_z dz \mathbf{e}_z \times h_\rho d\rho \mathbf{e}_\rho = h_z h_\rho dz d\rho \mathbf{e}_\varphi = dz d\rho \mathbf{e}_\varphi \quad (5.1.7)$$

であり、また、 $\rho\varphi$  曲面上の面素ベクトルは、曲面の表を  $z$  曲線の正の向きにとれば、

$$d\mathbf{S} = h_\rho d\rho \mathbf{e}_\rho \times h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi = h_\rho h_\varphi d\rho d\varphi \mathbf{e}_z = \rho d\rho d\varphi \mathbf{e}_z \quad (5.1.8)$$

である。ただし、 $d\rho$ ,  $d\varphi$ ,  $dz$  はすべて正であると考えよう。

## 体積要素

図 5.4 に示すように、 $d\rho$ ,  $d\varphi$ ,  $dz$  はすべて正であるとして点  $(\rho, \varphi, z)$  における 3 つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 &= h_\rho d\rho \mathbf{e}_\rho = d\rho \mathbf{e}_\rho \\ d\mathbf{r}_2 &= h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi = \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ d\mathbf{r}_3 &= h_z dz \mathbf{e}_z = dz \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

を考えると、円柱座標における体積要素は

$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{r}_1 \cdot (d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3) = h_\rho d\rho \mathbf{e}_\rho \cdot (h_\varphi d\varphi \mathbf{e}_\varphi \times h_z dz \mathbf{e}_z) \\ &= h_\rho h_\varphi h_z d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

と表される。

## 5.2 線積分・面積分・体積分

### 座標曲線に沿う線積分

円柱座標の座標曲線に沿う線積分の求め方について説明しよう。そのために、例として  $\rho$  曲線に沿う線積分を考える。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は円柱座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + V_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z \quad (5.2.1)$$

と表されるとする。また、積分経路として

$$\Gamma = \{(\rho, \varphi, z) \mid a \leq \rho \leq b, \varphi = \varphi_0, z = z_0\} \quad (5.2.2)$$

を考えよう。ただし、 $\Gamma$  は点  $(a, \varphi_0, z_0)$  から点  $(b, \varphi_0, z_0)$  へと向きづけられているとする。 $\Gamma$  上では  $\varphi, z$  は一定、つまり、 $d\varphi = 0, dz = 0$  であるから、 $\Gamma$  に沿う線素ベクトルは

$$d\mathbf{r} = h_\rho d\rho \mathbf{e}_\rho \quad (5.2.3)$$

と表される。したがって、 $\Gamma$  上の点  $(\rho, \varphi_0, z_0)$  における  $\mathbf{V}$  と  $d\mathbf{r}$  の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = V_\rho(\rho, \varphi_0, z_0)h_\rho(\rho, \varphi_0, z_0) d\rho \quad (5.2.4)$$

となるから、 $\Gamma$  に沿う  $\mathbf{V}$  の線積分を求めるには

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b V_\rho(\rho, \varphi_0, z_0)h_\rho(\rho, \varphi_0, z_0) d\rho \\ &= \int_a^b V_\rho(\rho, \varphi_0, z_0) d\rho \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

を計算すればよいことがわかる。たとえば、ベクトル場として

$$\mathbf{V} = \rho z \cos \varphi \mathbf{e}_\rho + \rho^2 z^2 \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi + \rho^3 z^3 \tan \varphi \mathbf{e}_z \quad (5.2.6)$$

を考えれば

$$\int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \rho z_0 \cos \varphi_0 d\rho = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)z_0 \cos \varphi_0 \quad (5.2.7)$$

となる。ここでは例として  $\rho$  曲線上の積分経路に沿う線積分の求め方について説明したが、 $\varphi$  曲線上の積分経路

$$\Gamma = \{(\rho, \varphi, z) \mid \rho = \rho_0, a \leq \varphi \leq b, z = z_0\} \quad (5.2.8)$$

に沿う線積分を求めるには

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b V_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0) h_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0) d\varphi \\ &= \int_a^b V_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0) \rho_0 d\varphi\end{aligned}\tag{5.2.9}$$

を計算すればよい。また、 $z$  曲線上の積分経路

$$\Gamma = \{(\rho, \varphi, z) \mid \rho = \rho_0, \varphi = \varphi_0, a \leq z \leq b\}\tag{5.2.10}$$

に沿う線積分を求めるには

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b V_z(\rho_0, \varphi_0, z) h_z(\rho_0, \varphi_0, z) dz \\ &= \int_a^b V_z(\rho_0, \varphi_0, z) dz\end{aligned}\tag{5.2.11}$$

を計算すればよい。

### 一般の曲線に沿う線積分

ここでは積分経路が一般の曲線上にある場合を考える。まず、曲線  $\Gamma$  をパラメータ表示する。つまり、パラメータ  $p$  用いて

$$\rho = \rho(p), \quad \varphi = \varphi(p), \quad z = z(p)\tag{5.2.12}$$

のように  $\Gamma$  上の点  $(\rho(p), \varphi(p), z(p))$  を表す。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は円柱座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_{\rho}(p)\mathbf{e}_{\rho} + V_{\varphi}(p)\mathbf{e}_{\varphi} + V_z(p)\mathbf{e}_z\tag{5.2.13}$$

と表されたとする。ただし、 $V_{\rho}(\rho(p), \varphi(p), z(p))$  などを簡単に  $V_{\rho}(p)$  などと書いた。このとき、

$$d\rho = \frac{d\rho}{dp} dp, \quad d\varphi = \frac{d\varphi}{dp} dp, \quad dz = \frac{dz}{dp} dp\tag{5.2.14}$$

であるから、 $\Gamma$  に沿う線素ベクトルは

$$d\mathbf{r} = \left\{ h_{\rho}(p) \frac{d\rho}{dp} \mathbf{e}_{\rho} + h_{\varphi}(p) \frac{d\varphi}{dp} \mathbf{e}_{\varphi} + h_z(p) \frac{dz}{dp} \mathbf{e}_z \right\} dp\tag{5.2.15}$$

と表される。ただし、 $h_\rho(\rho(p), \varphi(p), z(p))$ などを簡単に $h_\rho(p)$ など書いた。したがって、 $\Gamma$ 上の点 $(\rho(p), \varphi(p), z(p))$ における $\mathbf{V}$ と $d\mathbf{r}$ の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ V_\rho(p)h_\rho(p)\frac{d\rho}{dp} + V_\varphi(p)h_\varphi(p)\frac{d\varphi}{dp} + V_z(p)h_z(p)\frac{dz}{dp} \right\} dp \quad (5.2.16)$$

となるから、 $\Gamma$ に沿う $\mathbf{V}$ の線積分を求めるには

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_\Gamma \left\{ V_\rho(p)h_\rho(p)\frac{d\rho}{dp} + V_\varphi(p)h_\varphi(p)\frac{d\varphi}{dp} + V_z(p)h_z(p)\frac{dz}{dp} \right\} dp \\ &= \int_\Gamma \left\{ V_\rho(p)\frac{d\rho}{dp} + V_\varphi(p)\rho(p)\frac{d\varphi}{dp} + V_z(p)\frac{dz}{dp} \right\} dp \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

を計算すればよいことがわかる。

### 座標曲面上での面積分

円柱座標の座標曲面上での面積分の求め方について説明しよう。そのために例として $\varphi z$ 曲面上での面積分を考える。ベクトル場 $\mathbf{V}$ は円柱座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + V_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z \quad (5.2.18)$$

と表されるとする。また、積分領域として

$$\Sigma = \{(\rho, \varphi, z) \mid \rho = \rho_0, a \leq \varphi \leq b, c \leq z \leq d\} \quad (5.2.19)$$

を考えよう。ただし、 $\Sigma$ は $\rho$ 曲線の正の向きに向きづけられているとする。5.1節で(5.1.6)として求めたように、 $\varphi z$ 曲面上の面素ベクトルは

$$d\mathbf{S} = h_\varphi h_z d\varphi dz \mathbf{e}_\rho \quad (5.2.20)$$

である。したがって、 $\Sigma$ 上の点 $(\rho_0, \varphi, z)$ における $\mathbf{V}$ と $d\mathbf{S}$ の内積をとると

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = V_\rho(\rho_0, \varphi, z)h_\varphi(\rho_0, \varphi, z)h_z(\rho_0, \varphi, z) d\varphi dz \quad (5.2.21)$$

となるから、 $\Sigma$ 上での $\mathbf{V}$ の面積分を求めるには

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b V_\rho(\rho_0, \varphi, z)h_\varphi(\rho_0, \varphi, z)h_z(\rho_0, \varphi, z) d\varphi dz \\ &= \int_c^d \int_a^b V_\rho(\rho_0, \varphi, z)\rho_0 d\varphi dz \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

を計算すればよいことがわかる。たとえば、ベクトル場として

$$\mathbf{V} = \rho z \cos \varphi \mathbf{e}_\rho + \rho^2 z^2 \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi + \rho^3 z^3 \tan \varphi \mathbf{e}_z \quad (5.2.23)$$

を考えれば

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b \rho_0^2 z \cos \varphi \, d\varphi \, dz \\ &= \frac{1}{2} \rho_0^2 (d^2 - c^2) (\sin b - \sin a)\end{aligned}\tag{5.2.24}$$

となる。ここでは例として  $\varphi z$  曲面上の積分領域での面積分の求め方について説明したが、 $z\rho$  曲面上の積分領域

$$\Sigma = \{(\rho, \varphi, z) \mid c \leq \rho \leq d, \varphi = \varphi_0, a \leq z \leq b\}\tag{5.2.25}$$

での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b V_{\varphi}(\rho, \varphi_0, z) h_z(\rho, \varphi_0, z) h_{\rho}(\rho, \varphi_0, z) \, dz \, d\rho \\ &= \int_c^d \int_a^b V_{\varphi}(\rho, \varphi_0, z) \, dz \, d\rho\end{aligned}\tag{5.2.26}$$

を計算すればよい。また、 $\rho\varphi$  曲面上の積分領域

$$\Sigma = \{(\rho, \varphi, z) \mid a \leq \rho \leq b, c \leq \varphi \leq d, z = z_0\}\tag{5.2.27}$$

での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_c^d \int_a^b V_z(\rho, \varphi, z_0) h_{\rho}(\rho, \varphi, z_0) h_{\varphi}(\rho, \varphi, z_0) \, d\rho \, d\varphi \\ &= \int_c^d \int_a^b V_z(\rho, \varphi, z_0) \rho \, d\rho \, d\varphi\end{aligned}\tag{5.2.28}$$

を計算すればよい。

### 一般の曲面上での面積分

ここでは積分領域が一般の曲面上にある場合を考える。まず、曲面  $\Sigma$  をパラメータ表示する。つまり、パラメータ  $p, q$  を用いて

$$\rho = \rho(p, q), \quad \varphi = \varphi(p, q), \quad z = z(p, q)\tag{5.2.29}$$

のように  $\Sigma$  上の点  $(\rho(p, q), \varphi(p, q), z(p, q))$  を表す。ベクトル場  $\mathbf{V}$  は円柱座標の成分を用いて

$$\mathbf{V} = V_{\rho}(p, q)\mathbf{e}_{\rho} + V_{\varphi}(p, q)\mathbf{e}_{\varphi} + V_z(p, q)\mathbf{e}_z\tag{5.2.30}$$

と表されるとする。ただし、 $V_\rho(\rho(p, q), \varphi(p, q), z(p, q))$ などを簡単に  $V_\rho(p, q)$  などと書いた。このとき、5.1節で与えた面素ベクトルの表式 (5.1.4) において

$$\begin{aligned} d\rho_1 &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_q dp, & d\varphi_1 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)_q dp, & dz_1 &= \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_q dp \\ d\rho_2 &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)_p dq, & d\varphi_2 &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)_p dq, & dz_2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)_p dq \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

と選べば、 $\Sigma$ 上の面素ベクトルは

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} = \left\{ h_\varphi(p, q)h_z(p, q)\frac{\partial(\varphi, z)}{\partial(p, q)} \mathbf{e}_\rho + h_z(p, q)h_\rho(p, q)\frac{\partial(z, \rho)}{\partial(p, q)} \mathbf{e}_\varphi \right. \\ \left. + h_\rho(p, q)h_\varphi(p, q)\frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(p, q)} \mathbf{e}_z \right\} dp dq \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

と表される。ただし、 $h_\rho(\rho(p, q), \varphi(p, q), z(p, q))$ などを簡単に  $h_\rho(p, q)$  などと書いた。また、ヤコビアン

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right)_q & \left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)_p \\ \left(\frac{\partial\beta}{\partial p}\right)_q & \left(\frac{\partial\beta}{\partial q}\right)_p \end{vmatrix} \quad (5.2.33)$$

を用いた。したがって、 $\Sigma$ 上の点  $(\rho(p, q), \varphi(p, q), z(p, q))$ における  $\mathbf{V}$  と  $d\mathbf{S}$  の内積をとると

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \left\{ V_\rho(p, q)h_\varphi(p, q)h_z(p, q)\frac{\partial(\varphi, z)}{\partial(p, q)} \right. \\ + V_\varphi(p, q)h_z(p, q)h_\rho(p, q)\frac{\partial(z, \rho)}{\partial(p, q)} \\ \left. + V_z(p, q)h_\rho(p, q)h_\varphi(p, q)\frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

となるから、 $\mathbf{V}$  の  $\Sigma$  上での面積分を求めるには

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma} \left\{ V_{\rho}(p, q) h_{\varphi}(p, q) h_z(p, q) \frac{\partial(\varphi, z)}{\partial(p, q)} \right. \\ &\quad + V_{\varphi}(p, q) h_z(p, q) h_{\rho}(p, q) \frac{\partial(z, \rho)}{\partial(p, q)} \\ &\quad \left. + V_z(p, q) h_{\rho}(p, q) h_{\varphi}(p, q) \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ V_{\rho}(p, q) \rho(p, q) \frac{\partial(\varphi, z)}{\partial(p, q)} \right. \\ &\quad + V_{\varphi}(p, q) \frac{\partial(z, \rho)}{\partial(p, q)} \\ &\quad \left. + V_z(p, q) \rho(p, q) \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(p, q)} \right\} dp dq \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

を計算すればよいことがわかる。

## 体積分

空間の領域  $\Omega$  におけるスカラー場  $f$  の体積分を考える。5.1 節で求めたように、円柱座標における体積要素は (5.1.10) によって与えられる。したがって、円柱座標によって体積分を求めるには

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f dV &= \iiint_{\Omega} f(\rho, \varphi, z) h_{\rho}(\rho, \varphi, z) h_{\varphi}(\rho, \varphi, z) h_z(\rho, \varphi, z) d\rho d\varphi dz \\ &= \iiint_{\Omega} f(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

を計算すればよい。

## 5.3 勾配・回転・発散

### 勾配

円柱座標  $(\rho, \varphi, z)$  における  $\nabla f$  の表式は

$$\nabla f = \frac{1}{h_{\rho}} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} \mathbf{e}_{\rho} + \frac{1}{h_{\varphi}} \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{z\rho} \mathbf{e}_{\varphi} + \frac{1}{h_z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\rho\varphi} \mathbf{e}_z \quad (5.3.1)$$

すなわち

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} \mathbf{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{z\rho} \mathbf{e}_{\varphi} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\rho\varphi} \mathbf{e}_z \quad (5.3.2)$$

である。(5.3.1)の導出はこの項目の最後で行う。この表式の  $f$  として  $\rho, \varphi, z$  を考えると

$$\nabla\rho = \frac{\mathbf{e}_\rho}{h_\rho}, \quad \nabla\varphi = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{h_\varphi}, \quad \nabla z = \frac{\mathbf{e}_z}{h_z} \quad (5.3.3)$$

を得る。したがって、勾配についての連鎖律

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{\varphi z} \nabla\rho + \left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)_{z\rho} \nabla\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho\varphi} \nabla z \quad (5.3.4)$$

が成り立つことがわかる。さて、円柱座標における  $\nabla f$  の表式 (5.3.1) を導こう。円柱座標  $(\rho, \varphi, z)$  を用いると

$$\nabla f \cdot d\mathbf{r} = h_\rho d\rho \nabla f \cdot \mathbf{e}_\rho + h_\varphi d\varphi \nabla f \cdot \mathbf{e}_\varphi + h_z dz \nabla f \cdot \mathbf{e}_z \quad (5.3.5)$$

と書ける。これを  $f$  の全微分の表式

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{\varphi z} d\rho + \left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)_{z\rho} d\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho\varphi} dz \quad (5.3.6)$$

とくらべると、たとえば、 $\rho$  について

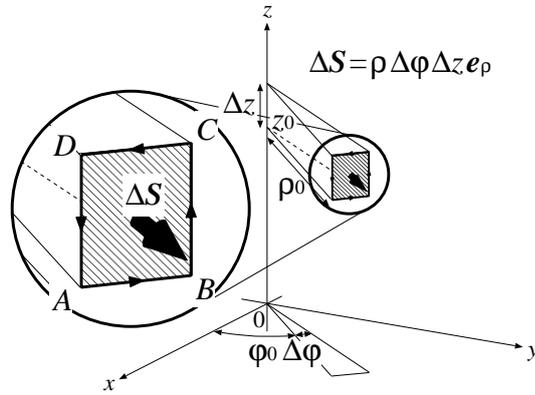
$$\nabla f \cdot \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{\varphi z} \quad (5.3.7)$$

であることがわかる。したがって、 $\varphi, z$  についても同様に考えると、円柱座標における  $\nabla f$  の表式として (5.3.1) が得られる。

## 回転

円柱座標  $(\rho, \varphi, z)$  における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{h_\varphi h_z} \left\{ \left(\frac{\partial V_z h_z}{\partial\varphi}\right)_{z\rho} - \left(\frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial z}\right)_{\rho\varphi} \right\} \mathbf{e}_\rho \\ &+ \frac{1}{h_z h_\rho} \left\{ \left(\frac{\partial V_\rho h_\rho}{\partial z}\right)_{\rho\varphi} - \left(\frac{\partial V_z h_z}{\partial\rho}\right)_{\varphi z} \right\} \mathbf{e}_\varphi \\ &+ \frac{1}{h_\rho h_\varphi} \left\{ \left(\frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial\rho}\right)_{\varphi z} - \left(\frac{\partial V_\rho h_\rho}{\partial\varphi}\right)_{z\rho} \right\} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.3.8)$$



$$\begin{aligned}
 A &= (\rho_0, \varphi_0, z_0) & B &= (\rho_0, \varphi_0 + \Delta\varphi, z_0) \\
 C &= (\rho_0, \varphi_0 + \Delta\varphi, z_0 + \Delta z) & D &= (\rho_0, \varphi_0, z_0 + \Delta z)
 \end{aligned}$$

図 5.5: 円柱座標における回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  の  $\rho$  成分を求めるための積分領域

すなわち

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \left( \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right)_{z\rho} - \left( \frac{\partial V_{\varphi\rho}}{\partial z} \right)_{\rho\varphi} \right\} \mathbf{e}_\rho \\
 &+ \left\{ \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right)_{\rho\varphi} - \left( \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} \right\} \mathbf{e}_\varphi \\
 &+ \frac{1}{\rho} \left\{ \left( \frac{\partial V_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} - \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right)_{z\rho} \right\} \mathbf{e}_z
 \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

である。(5.3.8)の導出はこの項目の最後で行う。これを

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho h_\rho & V_\varphi h_\varphi & V_z h_z \end{vmatrix} \tag{5.3.10}$$

と書くと覚えやすい。なお、この表式と勾配  $\nabla f$  の円柱座標における表式 (5.3.1) から  $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ 、つまり、保存場は渦なしであることがわかる。ベクトル場

$\mathbf{V}$  が保存場であるとき、スカラー場  $f$  を

$$\begin{aligned} f(\rho, \varphi, z) &= \int_{\rho_0}^{\rho} V_{\rho}(\rho', \varphi_0, z_0) h_{\rho}(\rho', \varphi_0, z_0) d\rho' \\ &+ \int_{\varphi_0}^{\varphi} V_{\varphi}(\rho, \varphi', z_0) h_{\varphi}(\rho, \varphi', z_0) d\varphi' + \int_{z_0}^z V_z(\rho, \varphi, z') h_z(\rho, \varphi, z') dz' \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

によって定義すると、 $\mathbf{V}$  は  $\mathbf{V} = \nabla f$  として与えられる。さて、円柱座標における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式 (5.3.8) を導こう。そのために、定義 (2.4.4) の  $\sigma$  として図 5.5 に示す

$$\begin{aligned} \gamma_1 : A \rightarrow B, \quad \gamma_2 : B \rightarrow C, \\ \gamma_3 : C \rightarrow D, \quad \gamma_4 : D \rightarrow A \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

を 4 つの辺とする微小曲面を考える。このとき、 $\sigma$  の境界は  $\partial\sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$  と表せる。まず、 $\gamma_1, \gamma_3$  に沿う線積分をあわせて考える。このとき、 $\gamma_1$  においては  $t = e_{\varphi}$  であるのに対し、 $\gamma_3$  においては  $t = -e_{\varphi}$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \{v_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0) - v_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0 + \Delta z)\} d\varphi \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

と書ける。ここで、 $v_{\varphi} = V_{\varphi} h_{\varphi}$  とおいた。さらに、 $v_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0 + \Delta z)$  を  $\Delta z$  についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$v_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0 + \Delta z) = v_{\varphi}(\rho_0, \varphi, z_0) + \left( \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z_0} \right)_{\rho_0 \varphi} \Delta z \quad (5.3.14)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \Delta\varphi} \left( \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z_0} \right)_{\rho_0 \varphi} \Delta z d\varphi \\ &= - \left( \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z_0} \right)_{\rho_0 \varphi_0} \Delta\varphi \Delta z = - \left( \frac{\partial V_{\varphi} h_{\varphi}}{\partial z_0} \right)_{\rho_0 \varphi_0} \Delta\varphi \Delta z \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

となる。ただし、2 番目の等式においては  $\Delta\varphi$  が微小量であることから被積分関数を  $\varphi = \varphi_0$  における値で置き換えて積分を評価した。次に、 $\gamma_2, \gamma_4$  に沿う線積分を

あわせて考える。このとき、 $\gamma_2$  においては  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_z$  であるのに対し、 $\gamma_4$  においては  $\mathbf{t} = -\mathbf{e}_z$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \{v_z(\rho_0, \varphi_0 + \Delta\varphi, z) - v_z(\rho_0, \varphi_0, z)\} dz \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

と書ける。ここで、 $v_z = V_z h_z$  とおいた。さらに、 $v_z(\rho_0, \varphi_0 + \Delta\varphi, z)$  を  $\Delta\varphi$  についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$v_z(\rho_0, \varphi_0 + \Delta\varphi, z) = v_z(\rho_0, \varphi_0, z) + \left( \frac{\partial v_z}{\partial \varphi_0} \right)_{z\rho_0} \Delta\varphi \quad (5.3.17)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_4} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \varphi_0} \right)_{z\rho_0} \Delta\varphi dz \\ &= \left( \frac{\partial v_z}{\partial \varphi_0} \right)_{z_0\rho_0} \Delta\varphi \Delta z = \left( \frac{\partial V_z h_z}{\partial \varphi_0} \right)_{z_0\rho_0} \Delta\varphi \Delta z \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

となる。ただし、2 番目の等式においては  $\Delta z$  が微小量であることから被積分関数を  $z = z_0$  における値で置き換えて積分を評価した。以上から、微小曲面  $\sigma$  の境界  $\partial\sigma$  に沿う線積分は

$$\int_{\partial\sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \left\{ \left( \frac{\partial V_z h_z}{\partial \varphi_0} \right)_{z_0\rho_0} - \left( \frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial z_0} \right)_{\rho_0\varphi_0} \right\} \Delta\varphi \Delta z \quad (5.3.19)$$

と書けることがわかる。一方、この微小曲面  $\sigma$  については  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ ,  $\Delta S = h_\varphi h_z \Delta\varphi \Delta z$  であるから、(2.4.5) によって、

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\varphi h_z} \left\{ \left( \frac{\partial V_z h_z}{\partial \varphi_0} \right)_{z_0\rho_0} - \left( \frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial z_0} \right)_{\rho_0\varphi_0} \right\} \quad (5.3.20)$$

が得られる。したがって、 $(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_\rho$ ,  $(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{e}_z$  についても同様に考え、 $\rho_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $z_0$  をあらためて  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  とおくと、円柱座標における  $\nabla \times \mathbf{V}$  の表式として (5.3.8) が得られる。

## 発散

円柱座標  $(\rho, \varphi, z)$  における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式は

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_\rho h_\varphi h_z} \left\{ \left( \frac{\partial V_\rho h_\rho h_z}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} + \left( \frac{\partial V_\varphi h_z h_\rho}{\partial \varphi} \right)_{z\rho} + \left( \frac{\partial V_z h_\rho h_\varphi}{\partial z} \right)_{\rho\varphi} \right\} \quad (5.3.21)$$

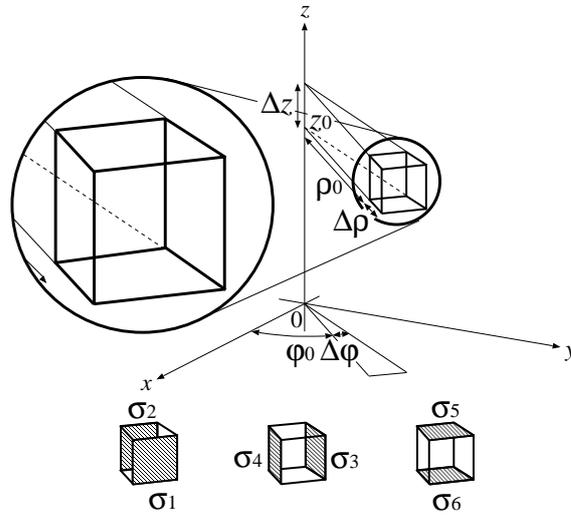


図 5.6: 円柱座標における発散  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式を求めるための積分領域

すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \left\{ \left( \frac{\partial V_\rho \rho}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} + \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{z\rho} + \left( \frac{\partial V_z \rho}{\partial z} \right)_{\rho\varphi} \right\} \quad (5.3.22)$$

である。(5.3.21) の導出はこの項目の最後で行う。この表式と回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  の円柱座標における表式 (5.3.8) から重要な性質として

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (5.3.23)$$

が成り立つことがわかる。つまり、ベクトル場の回転は湧き出しなしである。さて、円柱座標における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式 (5.3.21) を導こう。そのために、定義 (2.4.7) の  $\omega$  として図 5.6 に示す

$$\begin{aligned} \sigma_1 : (\rho_0 + \Delta\rho, \varphi, z) & \quad \sigma_2 : (\rho_0, \varphi, z) \\ \sigma_3 : (\rho, \varphi_0 + \Delta\varphi, z) & \quad \sigma_4 : (\rho, \varphi_0, z) \\ \sigma_5 : (\rho, \varphi, z_0 + \Delta z) & \quad \sigma_6 : (\rho, \varphi, z_0) \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

$$\rho_0 \leq \rho \leq \rho_0 + \Delta\rho, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \Delta\varphi, z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z$$

を 6 つの側面とする微小領域を考える。このとき、 $\omega$  の境界は  $\partial\omega = \sigma_1 + \cdots + \sigma_6$  と表せる。まず、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  の上での面積分をあわせて考える。このとき、 $\sigma_1$  におい

ては  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$  であるのに対し、 $\sigma_2$  においては  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_\rho$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\sigma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi} \{v_\rho(\rho_0 + \Delta\rho, \varphi, z) - v_\rho(\rho_0, \varphi, z)\} d\varphi dz \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

と書ける。ここで、 $v_\rho = V_\rho h_\varphi h_z$  とおいた。さらに、 $v_\rho(\rho_0 + \Delta\rho, \varphi, z)$  を  $\Delta\rho$  についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$v_\rho(\rho_0 + \Delta\rho, \varphi, z) = v_\rho(\rho_0, \varphi, z) + \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho_0} \right)_{\varphi z} \Delta\rho \quad (5.3.26)$$

であるから

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\sigma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi} \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho_0} \right)_{\varphi z} \Delta\rho d\varphi dz \\ &= \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho_0} \right)_{\varphi_0 z_0} \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z \\ &= \left( \frac{\partial V_\rho h_\varphi h_z}{\partial \rho_0} \right)_{\varphi_0 z_0} \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

となる。ただし、2 番目の等式においては  $\Delta\varphi$ 、 $\Delta z$  が微小量であることから被積分関数を  $\varphi = \varphi_0$ 、 $z = z_0$  における値で置き換えて積分を評価した。 $\sigma_3$  と  $\sigma_4$ 、 $\sigma_5$  と  $\sigma_6$  の上での面積分についても同様に考えると

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \left\{ \left( \frac{\partial V_\rho h_\varphi h_z}{\partial \rho_0} \right)_{\varphi_0 z_0} + \left( \frac{\partial V_\varphi h_z h_\rho}{\partial \varphi_0} \right)_{z_0 \rho_0} + \left( \frac{\partial V_z h_\rho h_\varphi}{\partial z_0} \right)_{\rho_0 \varphi_0} \right\} \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

となる。一方、 $\Delta V = h_\rho h_\varphi h_z \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z$  であるから、 $\rho_0$ 、 $\varphi_0$ 、 $z_0$  をあらためて  $\rho$ 、 $\varphi$ 、 $z$  とおくと、円柱座標における  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の表式として (5.3.21) が得られる。

## ラプラシアン

円柱座標におけるラプラシアン of 具体的な表式は

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 f &= \frac{1}{h_\rho h_\varphi h_z} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{h_\varphi h_z}{h_\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{h_z h_\rho}{h_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{z\rho} + \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{h_\rho h_\varphi}{h_z} \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\rho\varphi} \right\} \quad (5.3.29) \\
 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_{\varphi z} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right)_{z\rho} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{\rho\varphi}
 \end{aligned}$$

である。



## 第6章 積分定理

### 6.1 微分積分学の基本定理

1変数関数  $f(x)$  の微分と積分について

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a) \quad (6.1.1)$$

が成り立つ。これを**微分積分学の基本定理**という。この定理をスカラー場、ベクトル場に拡張したものがこの章で取り上げる**積分定理**である。スカラー場  $f$  については、第2章の勾配のところすでに(2.4.3)として

$$\int_{\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_b} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_b) - f(\mathbf{r}_a) \quad (6.1.2)$$

を導いた。(6.1.1), (6.1.2) は関数の微分を積分したものが積分領域の境界におけるもとの関数の値の差として与えられるという意味をもつ。以下で扱うベクトル場についての2つの積分定理もこの意味をより一般的な形で表すものとなっている。

### 6.2 ストークスの定理

ベクトル場  $\mathbf{V}$  の回転  $\nabla \times \mathbf{V}$  の定義

$$(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \Delta \mathbf{S} = \int_{\partial \sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.2.1)$$

に基づいて、隣接する2つの微小な3角形  $\sigma_1, \sigma_2$  に対してこれを適用してみよう。ここで、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  は1つの辺  $\gamma$  を共有しており、また、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  の面素ベクトルは同じ側を向いているとする。このとき、 $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  についての和

$$(\nabla \times \mathbf{V})_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + (\nabla \times \mathbf{V})_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = \int_{\partial \sigma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\partial \sigma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.2.2)$$

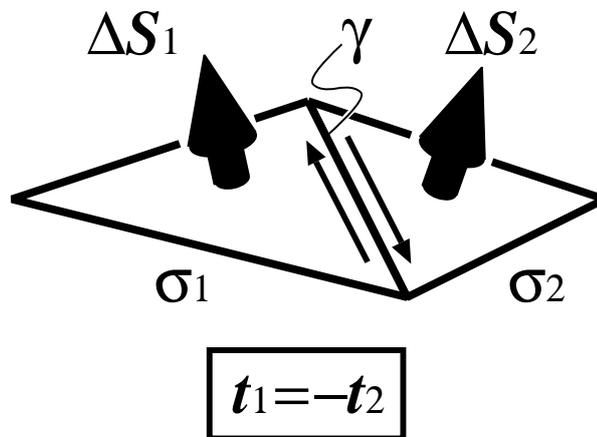


図 6.1: 共有する辺における線積分の相殺

を考えると、右辺の線積分への共有された辺  $\gamma$  からの寄与が相殺して消えることがわかる。これは、 $\partial\sigma_1$ 、 $\partial\sigma_2$  における辺  $\gamma$  上の接線ベクトル  $t_1$ 、 $t_2$  が互いに逆向きとなっているためである。したがって、

$$(\nabla \times \mathbf{V})_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + (\nabla \times \mathbf{V})_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = \int_{\partial(\sigma_1 + \sigma_2)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.2.3)$$

と書けることがわかる。ここで、 $\sigma_1 + \sigma_2$  は  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  をあわせた図形を表す。したがって、与えられた曲面  $\Sigma$  を微小な 3 角形によって  $\Sigma = \sum_i \sigma_i$  と分割して考えると、

$$\sum_i (\nabla \times \mathbf{V})_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_{\partial(\sum_i \sigma_i)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.2.4)$$

が成り立つことがわかる。(6.2.4) を積分の形で表すと

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.2.5)$$

となる。(6.2.5) を **ストークスの定理** という。ストークスの定理からわかる重要な性質は、 $\nabla \times \mathbf{V}$  の面積分は積分を行う曲面の境界さえ同じであれば異なる曲面に対してもまったく同じとなるという点である。これは、 $\nabla f$  の線積分 (6.1.2) が積分経路の始点と終点のみで決まり、途中の道すじによらないという性質と似ている。

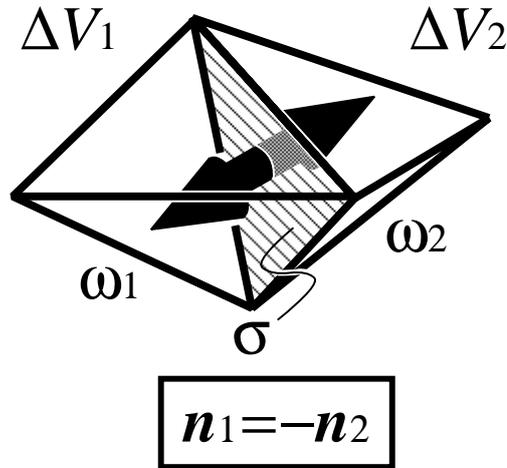


図 6.2: 共有する面における面積分の相殺

### 6.3 ガウスの定理

ベクトル場  $\mathbf{V}$  の発散  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  の定義

$$\nabla \cdot \mathbf{V} \Delta V = \iint_{\partial \omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.3.1)$$

に基づいて、隣接する2つの微小な4面体  $\omega_1, \omega_2$  に対してこれを適用してみよう。ここで、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  は1つの面  $\sigma$  を共有しているとする。このとき、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  についての和

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})_1 \Delta V_1 + (\nabla \cdot \mathbf{V})_2 \Delta V_2 = \iint_{\partial \omega_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\partial \omega_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.3.2)$$

を考えると、右辺の面積分への共有された面  $\sigma$  からの寄与が相殺して消えることがわかる。これは、 $\partial \omega_1, \partial \omega_2$  における面  $\sigma$  上の法線ベクトル  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  が互いに逆向きとなっているためである。したがって、

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})_1 \Delta V_1 + (\nabla \cdot \mathbf{V})_2 \Delta V_2 = \iint_{\partial(\omega_1 + \omega_2)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.3.3)$$

と書けることがわかる。ここで、 $\omega_1 + \omega_2$  は  $\omega_1$  と  $\omega_2$  をあわせた図形を表す。したがって、与えられた領域  $\Omega$  を微小な4面体によって  $\Omega = \sum_i \omega_i$  と分割して考えると、

$$\sum_i (\nabla \cdot \mathbf{V})_i \Delta V_i = \int_{\partial(\sum_i \omega_i)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.3.4)$$

が成り立つことがわかる。(6.3.4)を積分の形で表すと

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} \, dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.3.5)$$

となる。(6.3.5)を**ガウスの定理**という。

## 6.4 部分積分の公式

積の微分公式と積分定理をあわせて用いると以下の**部分積分の公式**を導くことができる。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{r_a \rightarrow r_b} (\nabla f)g \cdot d\mathbf{r} = [fg]_{r_a}^{r_b} - \int_{r_a \rightarrow r_b} f\nabla g \cdot d\mathbf{r} \\ (2) \quad & \iint_{\Sigma} (\nabla f \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} f\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} - \iint_{\Sigma} (f\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} \\ (3) \quad & \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{V} \, dV = \iint_{\partial\Omega} f\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} - \iiint_{\Omega} f\nabla \cdot \mathbf{V} \, dV \\ (4) \quad & \iiint_{\Omega} \mathbf{U} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \, dV = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{V} \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{S} \\ & \quad \quad \quad + \iiint_{\Omega} \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) \, dV \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

また、上の公式(3)において $\mathbf{V} = \nabla g$ とおくことにより

$$\iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV = \iint_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot d\mathbf{S} - \iiint_{\Omega} f\nabla^2 g \, dV \quad (6.4.2)$$

が得られる。さらに、この公式およびこの公式で $f$ と $g$ を入れ替えたものから

$$\iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) \, dV \quad (6.4.3)$$

が得られる。(6.4.2), (6.4.3)を**グリーンの公式**という。

## 補章 A 基底変換

### A.1 ヤコビ行列とヤコビアン

連鎖律 (1.1.12), (1.1.13), (1.1.14) はヤコビ行列  $\partial[x, y, z]/\partial[u, v, w]$  を

$$\frac{\partial[x, y, z]}{\partial[u, v, w]} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

によって定義すると

$$\left[ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu} \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv} \right] = \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \right] \frac{\partial[x, y, z]}{\partial[u, v, w]} \quad (\text{A.1.2})$$

と表すことができる。また、ヤコビ行列の行列式をヤコビアンといい、 $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$  によって表す。つまり、

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \end{vmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

である。(A.1.2) の  $f$  として  $r, s, t$  を考えると、ヤコビ行列は関係式

$$\frac{\partial[r, s, t]}{\partial[x, y, z]} \frac{\partial[x, y, z]}{\partial[u, v, w]} = \frac{\partial[r, s, t]}{\partial[u, v, w]} \quad (\text{A.1.4})$$

を満たすことがわかる。その結果、ヤコビアンも関係式

$$\frac{\partial(r, s, t)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{\partial(r, s, t)}{\partial(u, v, w)} \quad (\text{A.1.5})$$

を満たす。

## A.2 $\mathbb{R}^3$ における基底変換

$\mathbb{R}^3$  において2組の正規直交基底  $e_x, e_y, e_z$  と  $e_u, e_v, e_w$  を考え、 $e_u, e_v, e_w$  を  $e_x, e_y, e_z$  によって

$$\begin{aligned} e_u &= P_{11} e_x + P_{21} e_y + P_{31} e_z \\ e_v &= P_{12} e_x + P_{22} e_y + P_{32} e_z \\ e_w &= P_{13} e_x + P_{23} e_y + P_{33} e_z \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

と表そう。このとき、係数  $P_{ij}$  を並べてつくった行列

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

を  $e_x, e_y, e_z$  から  $e_u, e_v, e_w$  への基底変換を表す基底変換行列という。(A.2.1) は行列記法を用いると

$$[e_u \ e_v \ e_w] = [e_x \ e_y \ e_z] P \quad (\text{A.2.3})$$

と書ける。 $e_x, e_y, e_z$  は正規直交基底であるから、(A.2.1) の各式において  $e_x, e_y, e_z$  と両辺の内積をとることによって

$$P = \begin{bmatrix} e_x \cdot e_u & e_x \cdot e_v & e_x \cdot e_w \\ e_y \cdot e_u & e_y \cdot e_v & e_y \cdot e_w \\ e_z \cdot e_u & e_z \cdot e_v & e_z \cdot e_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

であることがわかる。逆に、 $e_x, e_y, e_z$  を  $e_u, e_v, e_w$  によって

$$\begin{aligned} e_x &= Q_{11} e_u + Q_{21} e_v + Q_{31} e_w \\ e_y &= Q_{12} e_u + Q_{22} e_v + Q_{32} e_w \\ e_z &= Q_{13} e_u + Q_{23} e_v + Q_{33} e_w \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

と表すときに現れる係数  $Q_{ij}$  を並べてつくった行列  $Q$  についても, (A.2.4) に対応して,

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.6})$$

が成り立つ。したがって, 内積の性質  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  に注意すると,  $Q$  は  $P$  の転置行列  ${}^tP$  であることがわかる。つまり,

$$Q = {}^tP \quad (\text{A.2.7})$$

である。一方, (A.2.5) を

$$[\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] = [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_v \ \mathbf{e}_w] Q \quad (\text{A.2.8})$$

と書けば, (A.2.3) から明らかなように,  $Q$  は  $P$  の逆行列  $P^{-1}$  であることがわかる。つまり

$$Q = P^{-1} \quad (\text{A.2.9})$$

である。したがって, (A.2.7) と (A.2.9) から

$$P^{-1} = {}^tP \quad (\text{A.2.10})$$

が成り立つ。(A.2.10) のように, 逆行列が転置行列によって与えられる行列を**直交行列**という。以上のように, 正規直交基底の間の基底変換を表す基底変換行列は直交行列であることがわかる。なお, 直交行列については  ${}^tPP = I$  であるから  $\det P = +1$  または  $-1$  である。 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  と  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$  がともに右手系またはともに左手系のとき  $\det P = +1$  であり, これに対し, 一方が右手系でもう一方が左手系のとき  $\det P = -1$  である。通常は正規直交基底として右手系のものを使うのが慣例である。最後に, 基底変換にともなうベクトルの成分の間の変換則を導こう。ベクトル  $\mathbf{a}$  を  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  と  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$  によって

$$\mathbf{a} = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_v \ \mathbf{e}_w] \begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.11})$$

と表すとわかるように,

$$\begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.12})$$

の関係が成り立つ。(A.2.12) が基底変換にともなうベクトルの成分の間の変換則である。

## A.3 直交曲線座標における基底変換

### 直交曲線座標

線素ベクトル  $d\mathbf{r}$  は直交座標  $(x, y, z)$  を用いると

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.1})$$

と表される。いま、点  $\mathbf{r}$  の直交座標  $(x, y, z)$  がもう 1 組の座標  $(u, v, w)$  によって

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \quad (\text{A.3.2})$$

と表される場合を考える。このとき  $x, y, z$  の全微分は

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} dv + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} dw \\ dy &= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} du + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} dv + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} dw \\ dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} du + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} dv + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} dw \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

であるから、これを (A.3.1) に用いると線素ベクトル  $d\mathbf{r}$  は

$$d\mathbf{r} = du \mathbf{r}_u + dv \mathbf{r}_v + dw \mathbf{r}_w \quad (\text{A.3.4})$$

と表される。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_{vw} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}_v &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_{wu} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}_w &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right)_{uv} = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

とおいた。さらに、3つのベクトル  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$  が空間の任意の点において互いに直交するとき、つまり、

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (\text{A.3.6})$$

であるとき、 $(u, v, w)$  は直交曲線座標であるという。 $(u, v, w)$  が直交曲線座標のときは  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$  を

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{r}_u/h_u, \quad \mathbf{e}_v = \mathbf{r}_v/h_v, \quad \mathbf{e}_w = \mathbf{r}_w/h_w \quad (\text{A.3.7})$$

と正規化し,  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$  を正規直交基底として用いるのが便利である。ここで, スケール因子  $h_u, h_v, h_w$  を  $h_u = |\mathbf{r}_u|, h_v = |\mathbf{r}_v|, h_w = |\mathbf{r}_w|$  と定義した。つまり,

$$\begin{aligned} h_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw}^2} \\ h_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu}^2} \\ h_w &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv}^2} \end{aligned} \quad (\text{A.3.8})$$

である。(A.3.7)を用いると, 線素ベクトル  $d\mathbf{r}$  は

$$d\mathbf{r} = h_u du \mathbf{e}_u + h_v dv \mathbf{e}_v + h_w dw \mathbf{e}_w \quad (\text{A.3.9})$$

と表される。なお, 以降では直交座標  $(x, y, z)$  も直交曲線座標の特別な場合とみなし,  $u = x, v = y, w = z, h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$  と考えることにする。

### 直交座標と直交曲線座標の間の基底変換

(A.3.5) と (A.3.7) から  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$  は  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  によって

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} \mathbf{e}_x + \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} \mathbf{e}_y + \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_v &= \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} \mathbf{e}_x + \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} \mathbf{e}_y + \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_w &= \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \mathbf{e}_x + \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \mathbf{e}_y + \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

と表される。これを

$$[\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_v \ \mathbf{e}_w] = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] P \quad (\text{A.3.11})$$

と書けば,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  から  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$  への基底変換を表す基底変換行列  $P$  は

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} & \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} & \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \\ \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} & \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} & \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \\ \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} & \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} & \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.12})$$

であることがわかる。このとき、 $e_x, e_y, e_z$  と  $e_u, e_v, e_w$  はともに正規直交基底であるから、 $P$  は直交行列であることに注意しよう。逆に、 $u, v, w$  を  $x, y, z$  の関数とみて

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \quad (\text{A.3.13})$$

と考えると、 $u, v, w$  の全微分は

$$\begin{aligned} du &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{yz} dx + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{zx} dy + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{xy} dz \\ dv &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{yz} dx + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{zx} dy + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{xy} dz \\ dw &= \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{yz} dx + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{zx} dy + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{xy} dz \end{aligned} \quad (\text{A.3.14})$$

となる。これを線素ベクトルの表式 (A.3.9) に用い、さらに、(A.3.1) とくらべることによって

$$\begin{aligned} e_x &= h_u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{yz} e_u + h_v \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{yz} e_v + h_w \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{yz} e_w \\ e_y &= h_u \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{zx} e_u + h_v \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{zx} e_v + h_w \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{zx} e_w \\ e_z &= h_u \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{xy} e_u + h_v \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{xy} e_v + h_w \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{xy} e_w \end{aligned} \quad (\text{A.3.15})$$

であることがわかる。ここで、(A.3.11) を逆に解いて

$$[e_x \ e_y \ e_z] = [e_u \ e_v \ e_w] P^{-1} \quad (\text{A.3.16})$$

と書けることに注意すると、

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} h_u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{yz} & h_u \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{zx} & h_u \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{xy} \\ h_v \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{yz} & h_v \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{zx} & h_v \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{xy} \\ h_w \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{yz} & h_w \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{zx} & h_w \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.17})$$

であることがわかる。ただし、この式によって  $P^{-1}$  を直接計算するよりも、まず (A.3.12) を用いて  $P$  を求め、次に  $P$  が直交行列であることから  $P^{-1} = {}^t P$  の関係に

よって逆行列  $P^{-1}$  を求めるほうが容易であることが多い。最後に、ヤコビ行列と基底変換行列  $P$  およびその逆行列  $P^{-1}$  との関係について述べておく。ヤコビ行列の定義 (A.1.1) から

$$P = \frac{\partial[x, y, z]}{\partial[u, v, w]} \begin{bmatrix} 1/h_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.18})$$

および

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} h_u & 0 & 0 \\ 0 & h_v & 0 \\ 0 & 0 & h_w \end{bmatrix} \frac{\partial[u, v, w]}{\partial[x, y, z]} \quad (\text{A.3.19})$$

と表される。ここで、ヤコビ行列の性質 (A.1.4) を考慮すると確かに  $P$  と  $P^{-1}$  は互いの逆行列であることがわかる。また、(A.1.2) に注意すると

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{h_u} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{vw} \frac{1}{h_v} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_{wu} \frac{1}{h_w} \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)_{uv} \right] \\ &= \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{yz} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{zx} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{xy} \right] P \end{aligned} \quad (\text{A.3.20})$$

および

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{yz} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{zx} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{xy} \right] \\ &= \left[ \frac{1}{h_u} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{vw} \frac{1}{h_v} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_{wu} \frac{1}{h_w} \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)_{uv} \right] P^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.3.21})$$

と書けることがわかる。

## 直交曲線座標の間の基底変換

直交曲線座標  $(u, v, w)$  がもう 1 組の直交曲線座標  $(r, s, t)$  によって

$$u = u(r, s, t), \quad v = v(r, s, t), \quad w = w(r, s, t) \quad (\text{A.3.22})$$

と表されるとき、

$$[e_u \ e_v \ e_w] = [e_x \ e_y \ e_z] \frac{\partial[x, y, z]}{\partial[u, v, w]} \begin{bmatrix} 1/h_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_w \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.23})$$

および

$$[\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_s \ \mathbf{e}_t] = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \frac{\partial[x, y, z]}{\partial[r, s, t]} \begin{bmatrix} 1/h_r & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_s & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.24})$$

であるから、 $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$  から  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$  への基底変換は基底変換行列

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} h_u & 0 & 0 \\ 0 & h_v & 0 \\ 0 & 0 & h_w \end{bmatrix} \frac{\partial[u, v, w]}{\partial[r, s, t]} \begin{bmatrix} 1/h_r & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_s & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{h_u}{h_r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{st} & \frac{h_u}{h_s} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{tr} & \frac{h_u}{h_t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{rs} \\ \frac{h_v}{h_r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{st} & \frac{h_v}{h_s} \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)_{tr} & \frac{h_v}{h_t} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{rs} \\ \frac{h_w}{h_r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{st} & \frac{h_w}{h_s} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_{tr} & \frac{h_w}{h_t} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{rs} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3.25})$$

を用いて

$$[\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_s \ \mathbf{e}_t] = [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_v \ \mathbf{e}_w] P \quad (\text{A.3.26})$$

と表せる。また、 ${}^t P P = I$  であるからスケール因子  $h_r, h_s, h_t$  は

$$\begin{aligned} h_r &= \sqrt{h_u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{st}^2 + h_v^2 \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{st}^2 + h_w^2 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{st}^2} \\ h_s &= \sqrt{h_u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{tr}^2 + h_v^2 \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)_{tr}^2 + h_w^2 \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_{tr}^2} \\ h_t &= \sqrt{h_u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{rs}^2 + h_v^2 \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{rs}^2 + h_w^2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{rs}^2} \end{aligned} \quad (\text{A.3.27})$$

によって与えられる。

### 直交曲線座標における基底ベクトルの微分

直交曲線座標  $(u, v, w)$  における基底ベクトル  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$  の座標変数  $\alpha (= u, v, w)$  による微分について

$$\partial_\alpha [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_v \ \mathbf{e}_w] = [\mathbf{e}_u \ \mathbf{e}_v \ \mathbf{e}_w] \Gamma_\alpha \quad (\text{A.3.28})$$

が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_u &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h_v} \left( \frac{\partial h_u}{\partial v} \right)_{wu} & \frac{1}{h_w} \left( \frac{\partial h_u}{\partial w} \right)_{uv} \\ -\frac{1}{h_v} \left( \frac{\partial h_u}{\partial v} \right)_{wu} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_w} \left( \frac{\partial h_u}{\partial w} \right)_{uv} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \Gamma_v &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{h_u} \left( \frac{\partial h_v}{\partial u} \right)_{vw} & 0 \\ \frac{1}{h_u} \left( \frac{\partial h_v}{\partial u} \right)_{vw} & 0 & \frac{1}{h_w} \left( \frac{\partial h_v}{\partial w} \right)_{uv} \\ 0 & -\frac{1}{h_w} \left( \frac{\partial h_v}{\partial w} \right)_{uv} & 0 \end{bmatrix} \\
 \Gamma_w &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{h_u} \left( \frac{\partial h_w}{\partial u} \right)_{vw} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_v} \left( \frac{\partial h_w}{\partial v} \right)_{wu} \\ \frac{1}{h_u} \left( \frac{\partial h_w}{\partial u} \right)_{vw} & \frac{1}{h_v} \left( \frac{\partial h_w}{\partial v} \right)_{wu} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3.29}$$

である。(A.3.28), (A.3.29) は次のように導かれる。はじめに, (A.3.5) で定義した  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$  の間の内積が

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = h_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \tag{A.3.30}$$

を満たすことを用いて  $\mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\beta$  を求める。(A.3.30) を  $\gamma$  で微分すると

$$\partial_\gamma (\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta) = \mathbf{r}_\beta \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\beta = 2h_\alpha \partial_\gamma h_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{A.3.31}$$

となる。したがって,  $\alpha = \beta$  のとき

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\alpha = h_\alpha \partial_\gamma h_\alpha \tag{A.3.32}$$

である。また,  $\alpha \neq \beta$  のときは  $\gamma = \alpha$  または  $\gamma = \beta$  の場合と  $\gamma \neq \alpha$  かつ  $\gamma \neq \beta$  の場合に分けて考える。まず,  $\gamma = \alpha \neq \beta$  として考えよう。 $\partial_\alpha \mathbf{r}_\beta = \partial_\beta \mathbf{r}_\alpha$  であるから

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{r}_\alpha = h_\alpha \partial_\beta h_\alpha \tag{A.3.33}$$

となる。一方, (A.3.31) より

$$\mathbf{r}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\beta = 0 \tag{A.3.34}$$

であるから

$$\mathbf{r}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\alpha = -\mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\beta = -h_\alpha \partial_\beta h_\alpha \quad (\text{A.3.35})$$

となる。次に、 $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ として考えよう。このとき、

$$\mathbf{r}_\beta \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\beta = 0 \quad (\text{A.3.36})$$

であるから、 $\partial_\alpha \mathbf{r}_\beta = \partial_\beta \mathbf{r}_\alpha$ を考慮すると、

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\beta = -\mathbf{r}_\beta \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\alpha = -\mathbf{r}_\beta \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\gamma = \mathbf{r}_\gamma \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\beta \quad (\text{A.3.37})$$

である。一方、

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{r}_\gamma = -\mathbf{r}_\gamma \cdot \partial_\beta \mathbf{r}_\alpha = -\mathbf{r}_\gamma \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_\beta \quad (\text{A.3.38})$$

であるから、実は

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \mathbf{r}_\beta = 0 \quad (\text{A.3.39})$$

であることがわかる。このようにして得られた (A.3.32), (A.3.33), (A.3.35), (A.3.39) を用いると、基底ベクトルの微分 (A.3.28), (A.3.29) は次のように求められる。まず、 $\partial_\alpha [e_x e_y e_z] = 0$  であることに注意して基底変換を表す式

$$[e_u e_v e_w] = [e_x e_y e_z] P \quad (\text{A.3.40})$$

の両辺を  $\alpha$  で微分すると

$$\partial_\alpha [e_u e_v e_w] = [e_x e_y e_z] \partial_\alpha P = [e_u e_v e_w] P^{-1} \partial_\alpha P \quad (\text{A.3.41})$$

となる。したがって、 $P^{-1} = {}^t P$  であることから (A.3.28) における行列  $\Gamma_\alpha$  は

$$\Gamma_\alpha = {}^t P \partial_\alpha P \quad (\text{A.3.42})$$

によって与えられることがわかる。ここで、 ${}^t P P = I$  を  $\alpha$  で微分すると

$$(\partial_\alpha {}^t P) P + {}^t P \partial_\alpha P = {}^t \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha = 0 \quad (\text{A.3.43})$$

となるから,  ${}^t\Gamma_\alpha = -\Gamma_\alpha$ , つまり,  $\Gamma_\alpha$  は交代行列であることがわかる。さらに,  $\partial[x, y, z]/\partial[u, v, w] = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w]$  と書けることに注意すると,  $\Gamma_\alpha$  は

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha &= {}^tP \partial_\alpha P \\
&= \begin{bmatrix} 1/h_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{r}_u \\ {}^t\mathbf{r}_v \\ {}^t\mathbf{r}_w \end{bmatrix} \\
&\quad \partial_\alpha \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v & \mathbf{r}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/h_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_w \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{r}_u \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_u}{h_u h_u} & \frac{\mathbf{r}_u \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_v}{h_u h_v} & \frac{\mathbf{r}_u \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_w}{h_u h_w} \\ \frac{\mathbf{r}_v \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_u}{h_v h_u} & \frac{\mathbf{r}_v \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_v}{h_v h_v} & \frac{\mathbf{r}_v \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_w}{h_v h_w} \\ \frac{\mathbf{r}_w \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_u}{h_w h_u} & \frac{\mathbf{r}_w \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_v}{h_w h_v} & \frac{\mathbf{r}_w \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_w}{h_w h_w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial_\alpha h_u}{h_u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial_\alpha h_v}{h_v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial_\alpha h_w}{h_w} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.44}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathbf{r}_u \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_v}{h_u h_v} & \frac{\mathbf{r}_u \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_w}{h_u h_w} \\ -\frac{\mathbf{r}_u \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_v}{h_u h_v} & 0 & \frac{\mathbf{r}_v \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_w}{h_v h_w} \\ -\frac{\mathbf{r}_u \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_w}{h_u h_w} & -\frac{\mathbf{r}_v \cdot \partial_\alpha \mathbf{r}_w}{h_v h_w} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と求められる。(A.3.44) を (A.3.33), (A.3.35), (A.3.39) を用いて具体的に計算すると行列 (A.3.29) が得られる。

## 球座標

球座標  $(r, \theta, \varphi)$  は

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (\text{A.3.45})$$

によって定義される。ここで,  $r$  は  $\mathbf{r}$  の長さ,  $\theta$  は  $\mathbf{r}$  と  $z$  軸のなす角,  $\varphi$  は  $\mathbf{r}$  を  $xy$  平面に射影したベクトルと  $x$  軸のなす角である。(A.3.5) によって計算すると

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\
\mathbf{r}_\theta &= r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z \\
\mathbf{r}_\varphi &= -r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y
\end{aligned} \quad (\text{A.3.46})$$

となる。3つのベクトル  $\mathbf{r}_r$ ,  $\mathbf{r}_\theta$ ,  $\mathbf{r}_\varphi$  は互いに直交するから、球座標は直交曲線座標である。そこで、(A.3.8) によってスケール因子  $h_r = |\mathbf{r}_r|$ ,  $h_\theta = |\mathbf{r}_\theta|$ ,  $h_\varphi = |\mathbf{r}_\varphi|$  を求めると

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta \quad (\text{A.3.47})$$

となるから、線素ベクトルは球座標を用いると

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{A.3.48})$$

と表されることがわかる。ここで、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}_r/h_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{r}_\theta/h_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{r}_\varphi/h_\varphi$  は正規直交基底であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (\text{A.3.49})$$

と表される。さらに、(A.3.11) によると  $[\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\varphi] = [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] P$  であるから、基底変換行列  $P$  は

$$P = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.50})$$

と求められる。これは、(A.3.12) によって求めることもできる。一方、 $P$  の逆行列は直交行列の性質  $P^{-1} = {}^t P$  から

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.51})$$

と求められる。したがって、(A.3.16) によると  $[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] = [\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\varphi] P^{-1}$  であるから、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.3.52})$$

と表される。また, (A.3.20) から

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} &= \sin\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + \sin\theta \sin\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} + \cos\theta \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} &= r \cos\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + r \cos\theta \sin\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} - r \sin\theta \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} &= -r \sin\theta \sin\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + r \sin\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx}
 \end{aligned}
 \tag{A.3.53}$$

であり, 同様に, (A.3.21) から

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} &= \sin\theta \cos\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} + \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} - \frac{\sin\varphi}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} &= \sin\theta \sin\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} + \frac{\cos\theta \sin\varphi}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} + \frac{\cos\varphi}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} &= \cos\theta \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} - \frac{\sin\theta}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r}
 \end{aligned}
 \tag{A.3.54}$$

であることがわかる。最後に, 球座標における基底ベクトルの微分について述べよう。(A.3.44) を用いて計算すると,  $\partial_\alpha [\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta \ \mathbf{e}_\varphi] = [\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta \ \mathbf{e}_\varphi] \Gamma_\alpha$  における行列  $\Gamma_\alpha$  は

$$\Gamma_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & -\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}
 \tag{A.3.55}$$

と求められる。

## 円柱座標

円柱座標  $(\rho, \varphi, z)$  は

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z
 \tag{A.3.56}$$

によって定義される。ここで,  $\rho$  は  $\mathbf{r}$  を  $xy$  平面に射影したベクトルの長さ,  $\varphi$  はこのベクトルと  $x$  軸のなす角である。(A.3.5) によって計算すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_\rho &= \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y \\
 \mathbf{r}_\varphi &= -\rho \sin\varphi \mathbf{e}_x + \rho \cos\varphi \mathbf{e}_y \\
 \mathbf{r}_z &= \mathbf{e}_z
 \end{aligned}
 \tag{A.3.57}$$

となる。3つのベクトル  $\mathbf{r}_\rho$ ,  $\mathbf{r}_\varphi$ ,  $\mathbf{r}_z$  は互いに直交するから、円柱座標は直交曲線座標である。そこで、(A.3.8) によってスケール因子  $h_\rho = |\mathbf{r}_\rho|$ ,  $h_\varphi = |\mathbf{r}_\varphi|$ ,  $h_z = |\mathbf{r}_z|$  を求めると

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1 \quad (\text{A.3.58})$$

となるから、線素ベクトルは円柱座標を用いると

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z \quad (\text{A.3.59})$$

と表されることがわかる。ここで、 $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{r}_\rho/h_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{r}_\varphi/h_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_z = \mathbf{r}_z/h_z$  は正規直交基底であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.3.60})$$

と表される。さらに、(A.3.11) によると  $[\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z] = [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] P$  であるから、基底変換行列  $P$  は

$$P = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.61})$$

と求められる。これは、(A.3.12) によって求めることもできる。一方、 $P$  の逆行列は直交行列の性質  $P^{-1} = {}^t P$  から

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.62})$$

と求められる。したがって、(A.3.16) によると  $[\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] = [\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z] P^{-1}$  であるから、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_y &= \sin \varphi \mathbf{e}_\rho + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.3.63})$$

と表される。また, (A.3.20) から

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi z} &= \cos \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + \sin \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{z\rho} &= -\rho \sin \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + \rho \cos \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho\varphi} &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy}
 \end{aligned} \tag{A.3.64}$$

であり, 同様に, (A.3.21) から

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} &= \cos \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi z} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{z\rho} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} &= \sin \varphi \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi z} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{z\rho} \\
 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho\varphi}
 \end{aligned} \tag{A.3.65}$$

であることがわかる。最後に, 円柱座標における基底ベクトルの微分について述べよう。(A.3.44) を用いて計算すると,  $\partial_\alpha [e_\rho e_\varphi e_z] = [e_\rho e_\varphi e_z] \Gamma_\alpha$  における行列  $\Gamma_\alpha$  は

$$\Gamma_\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.3.66}$$

と求められる。

# 索引

渦度	11	座標平面	13
渦なし	11	循環	10
円柱座標	45, 79	スカラー3重積	5
外積	3	スカラー場	7
回転	11	スケール因子	71
円柱座標における—	55	円柱座標における—	45, 80
球座標における—	39	球座標における—	29, 78
直交座標における—	22	ストークスの定理	63
ガウスの定理	65	正規直交基底	3
基底ベクトル	3	積の微分公式	27
—の微分	74	積分定理	63
基底変換	67	線積分	9
直交曲線座標の間の—	73	円柱座標における—	49
基底変換行列	68, 71, 72	球座標における—	33
円柱座標における—	80	直交座標における—	17
球座標における—	78	線素	7
球座標	29, 77	線素ベクトル	7
曲面の境界	10	円柱座標における—	45, 80
グリーンの公式	66	球座標における—	29, 78
勾配	10	直交座標における—	13
円柱座標における—	54	全微分	1
球座標における—	38	体積分	10
直交座標における—	21	円柱座標における—	54
座標曲線	29, 45	球座標における—	38
座標曲面	29, 45	直交座標における—	21
座標直線	13	体積要素	9
		円柱座標における—	48

球座標における—	32	直交座標における—	19
直交座標における—	16	面素	9
直交行列	69	面素ベクトル	7
直交曲線座標	70	円柱座標における—	46
直交座標	13	球座標における—	32
テイラー展開	1	直交座標における—	16
等位面	11	ヤコビアン	67
内積	3	ヤコビ行列	67, 73
発散	11	ラグランジュの公式	6
円柱座標における—	58	ラプラシアン	12
球座標における—	42	円柱座標における—	61
直交座標における—	25	球座標における—	44
パラメータ表示		直交座標における—	26
曲線の—	18, 34, 50	流出	10
曲面の—	20, 37, 52	連鎖律	2
左手系	6	湧き出し	12
微分積分学の基本定理	63	湧き出しなし	12
部分積分の公式	66		
ベクトル3重積	5		
ベクトルの成分	3		
—の間の変換則	69		
ベクトルの長さ	3		
ベクトル場	7		
偏微分	1		
方向微分係数	10		
保存場	11		
右手系	6		
面積分	10		
円柱座標における—	51		
球座標における—	35		