ベクトル空間　ー　次のような性質を持つ集合V

任意の元 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対して次のような和が成り立つ

① $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

② $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

次の関係を満たす特別の元$\boldsymbol{o}$が存在

③ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$

ある元$\boldsymbol{a}$に対して次を満たす元$\boldsymbol{b}$が存在

④ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$　（このとき$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$）

スカラーλに対してスカラー乗法$\lambda\cdot\boldsymbol{a}$が定義でき、$\lambda\cdot\boldsymbol{a}$ もまたVの元となり、
次の関係を満たす（μもあるスカラー）

⑤ $\lambda\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\cdot\boldsymbol{a}+\lambda\cdot\boldsymbol{b}$

⑥ $(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\cdot\boldsymbol{a}+\mu\cdot\boldsymbol{b}$

⑦ $(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{a})$

⑧ $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

関数 $f(x), g(x), \ldots$の集合もこれらを満たす
→ **関数もベクトル！**

ユークリッドベクトル空間（計量ベクトル空間）

通常、ベクトルの長さは内積で定義される

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$$

次のようなユークリッド的長さ（ユークリッドノルム）$l(\boldsymbol{a})$ が定義されたベクトル空間

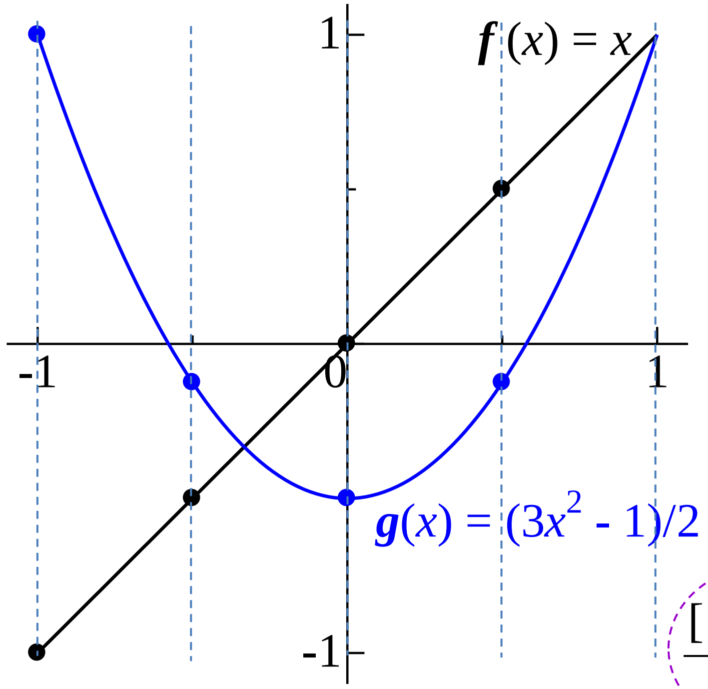
L①全ての $\boldsymbol{a}$ に対して$l(\boldsymbol{a})\geqq 0$ で、$l(\boldsymbol{a})=0$ となるのは$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$のみ

L②全ての $\boldsymbol{a}$ と全てのスカラーλに対して$l(\lambda\cdot\boldsymbol{a})=|\lambda|\cdot l(\boldsymbol{a})$

L③全ての $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して　$l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\leqq l(\boldsymbol{a})+l(\boldsymbol{b})$

L④全ての $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して　$2[(l(\boldsymbol{a}))^2+(l(\boldsymbol{b}))^2]=(l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))^2+(l(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}))^2$

区間[a,b]における関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積をどう定義する？



1次及び2次のルジャンドル多項式

例として、区間[-1,1]、$f(x) = x$, $g(x) = (3x^2 – 1)/2$ とする

関数値の変化の様子を近似的に表わすものとして、[-1,1] を4分割してx = -1, -0.5, 0, 0.5のときの値を各分割での代表値として列記したものを考える

$f(x)$に対して : (-1, -0.5, 0, 0.5)

$g(x)$に対して : (1, -0.125, -1/2, -0.125)

これらは4次元数ベクトルと同じ形式

発想の飛躍！**同列の値の積の和**で内積を表わす！

$$\frac{[1 - (-1)]}{4}[(-1)\cdot 1 + (-0.5)\cdot(-0.125) + 0\cdot(-1/2) + 0.5\cdot(-0.125)]$$

各代表点は全区間の1/4を分担

分割を無限にすると、元の関数を表わせるはず！

一般的に区間 [a, b] に対して$\Delta_n = (b - a)/n$ とすれば、積分可能な$f(x)$及び$g(x)$について

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\Delta_n i)\cdot g(a+\Delta_n i)\cdot\Delta_n}_{\text{リーマン積分の定義}} = \boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx}$$

リーマン積分の定義

区間 [a, b] における $f(x)$ と $g(x)$ の内積

区間[-π,π]における sin*nx* と cos*mx* について（*n*, *m*：自然数）

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \pi\delta_{mn} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \pi\delta_{mn} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

[-π,π]においてsin*nx* や cos*mx* は直交ベクトル！

→ 区間[-π,π]で定義された周期関数を一次結合で表わす基底として便利

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

フーリエ級数による *f*(*x*) の展開

a_nやb_nを求めるためには？ ー cos*nx* や sin*nx* の直交性を使えばよい！

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) \right] \cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nxdx = \pi a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx}_{[-\pi,\pi]\text{における}f(x)\text{と}\cos nx\text{の内積}} \qquad \text{同様にして} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

[-π,π]における cos*nx* の大きさの2乗

[-π,π]においてcos*nx*などを正規化（規格化）した形で表わすと

正規直交基底

$$f(x) = a'_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a'_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b'_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right), \quad a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \boxed{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}} dx, \quad b'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \boxed{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}} dx$$

区間[-π,π]で定義された $f(x) = x$ のフーリエ級数

$$f(x) = a'_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a'_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b'_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ は正規直交系

$$a'_0 = \left(x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, dx =$$

$$a'_n = \left(x, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \, dx =$$

$$b'_n = \left(x, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \, dx =$$

$f(x) = x$ についての直交基底ベクトル $\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ への正射影（**[-π,π]における**内積）

区間[-π,π]で定義された $f(x) = x$ のフーリエ級数

$$a'_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 0 , \qquad a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0$$

（奇関数と偶関数の積）

$$b'_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = \dots = \frac{2\sqrt{\pi}}{n} (-1)^{n+1}$$

$$\therefore\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

$$= 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots)$$