

2次元において、互いに直交するベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて任意ベクトル $\vec{c}$ が以下で表される。

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

このとき、係数 s, t を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと

$$s =$$

$$t =$$

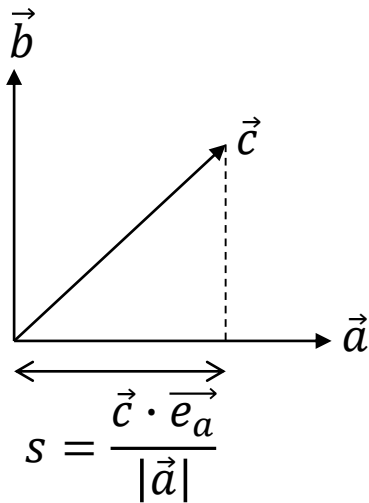
2次元において、互いに直交するベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて任意ベクトル $\vec{c}$ が以下で表される。

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

このとき、係数 s, t を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと

$$s = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{e}_a}{|\vec{a}|} \qquad t = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{e}_b}{|\vec{b}|}$$

$\vec{e}_a, \vec{e}_b$ は $\vec{a}, \vec{b}$ の単位ベクトル



ベクトル空間 — 次のような性質を持つ集合 V

任意の元 a, b, c に対して次のような和が成り立つ

① $(a + b) + c = a + (b + c)$

② $a + b = b + a$

次の関係を満たす特別の元 o が存在

③ $a + o = a$

ある元 a に対して次を満たす元 b が存在

④ $a + b = o$ (このとき $b = -a$)

スカラー λ に対してスカラー乗法 $\lambda \cdot a$ が定義でき、 $\lambda \cdot a$ もまた V の元となり、
次の関係を満たす (μ もあるスカラー)

⑤ $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$

⑥ $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot b$

⑦ $(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$

⑧ $1 \cdot a = a$

関数 $f(x), g(x), \dots$ の集合もこれらを満たす
→ **関数もベクトル!**

ユークリッドベクトル空間 (計量ベクトル空間)

通常、ベクトルの長さは内積で定義される

$$|a| = \sqrt{(a, a)}$$

次のようなユークリッド的長さ (ユークリッドノルム) $l(a)$ が定義されたベクトル空間

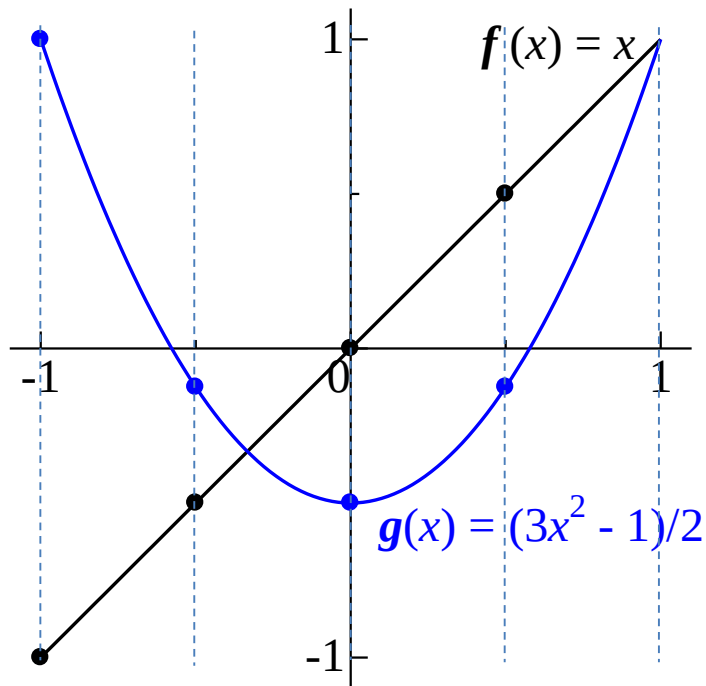
L① 全ての a に対して $l(a) \geq 0$ で、 $l(a) = 0$ となるのは $a = o$ のみ

L② 全ての a と全てのスカラー λ に対して $l(\lambda \cdot a) = |\lambda| \cdot l(a)$

L③ 全ての a, b に対して $l(a + b) \leq l(a) + l(b)$

L④ 全ての a, b に対して $2[(l(a))^2 + (l(b))^2] = (l(a + b))^2 + (l(a - b))^2$

区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積をどう定義する？



例として、区間 $[-1,1]$ 、 $f(x) = x$, $g(x) = (3x^2 - 1)/2$ とする

関数値の変化の様子を近似的に表わすものとして、 $[-1,1]$ を4分割して $x = -1, -0.5, 0, 0.5$ のときの値を各分割での代表値として列記したもの考える

$f(x)$ に対して： $(-1, \quad -0.5, \quad 0, \quad 0.5)$

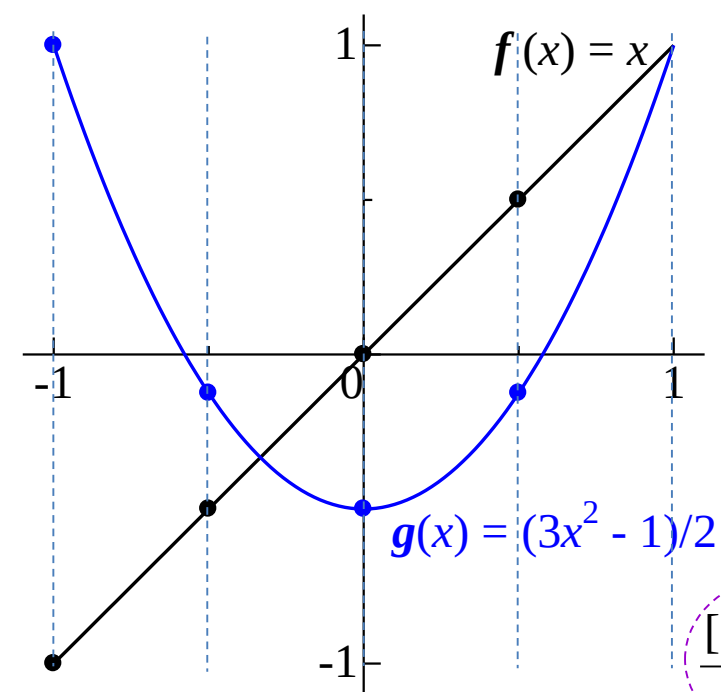
$g(x)$ に対して： $(1, -0.125, -1/2, -0.125)$

これらは4次元数ベクトルと同じ形式

発想の飛躍！ **同列の値の積の和**で内積を表わす！

$$[(-1) \cdot 1 + (-0.5) \cdot (-0.125) + 0 \cdot (-1/2) + 0.5 \cdot (-0.125)]$$

区間[a,b]における関数 f(x) と g(x) の内積をどう定義する？



1次及び2次のルジャンドル多項式

例として、区間[-1,1]、 $f(x) = x$, $g(x) = (3x^2 - 1)/2$ とする
関数値の変化の様子を近似的に表わすものとして、
[-1,1] を4分割して $x = -1, -0.5, 0, 0.5$ のときの値を各
分割での代表値として列記したものを考える

$f(x)$ に対して: (-1, -0.5, 0, 0.5)
 $g(x)$ に対して: (1, -0.125, -1/2, -0.125)

これらは4次元数ベクトルと同じ形式
発想の飛躍！ **同列の値の積の和** で内積を表わす！

$$\frac{[1 - (-1)]}{4} [(-1) \cdot 1 + (-0.5) \cdot (-0.125) + 0 \cdot (-1/2) + 0.5 \cdot (-0.125)]$$

各代表点は全区間の1/4を分担

分割を無限にすると、元の関数を表わせるはず！

一般的に区間 $[a, b]$ に対して $\Delta_n = (b - a)/n$ とすれば、積分可能な $f(x)$ 及び $g(x)$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \Delta_n i) \cdot g(a + \Delta_n i) \cdot \Delta_n = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

リーマン積分の定義

区間 $[a, b]$ における $f(x)$ と $g(x)$ の内積

区間 $[-\pi, \pi]$ における $\sin nx$ と $\cos mx$ について (n, m : 自然数)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \pi \delta_{mn} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \pi \delta_{mn} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

$[-\pi, \pi]$ において $\sin nx$ や $\cos mx$ は直交ベクトル！

→ 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された**周期関数**を一次結合で表わす基底として便利

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{フーリエ級数による } f(x) \text{ の展開}$$

a_n や b_n を求めるには？

区間 $[-\pi, \pi]$ における $\sin nx$ と $\cos mx$ について (n, m : 自然数)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \pi \delta_{mn} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \pi \delta_{mn} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

$[-\pi, \pi]$ において $\sin nx$ や $\cos mx$ は直交ベクトル！

→ 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された**周期関数**を一次結合で表わす基底として便利

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{フーリエ級数による } f(x) \text{ の展開}$$

a_n や b_n を求めるには？ — $\cos nx$ や $\sin nx$ の直交性を使えばよい！

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx dx = \pi a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{同様にして} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$[-\pi, \pi]$ における $\cos nx$
の大きさの2乗

$[-\pi, \pi]$ における $f(x)$ と $\cos nx$ の内積

$[-\pi, \pi]$ において $\cos nx$ などを正規化(規格化)した形で表わすと **正規直交基底**

$$f(x) = a'_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a'_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b'_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right), \quad a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx, \quad b'_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx$$

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された $f(x) = x$ のフーリエ級数

$$f(x) = a'_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a'_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b'_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \text{ は正規直交系}$$

$$a'_0 = \left(x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$a'_n = \left(x, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx =$$

$$b'_n = \left(x, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx =$$

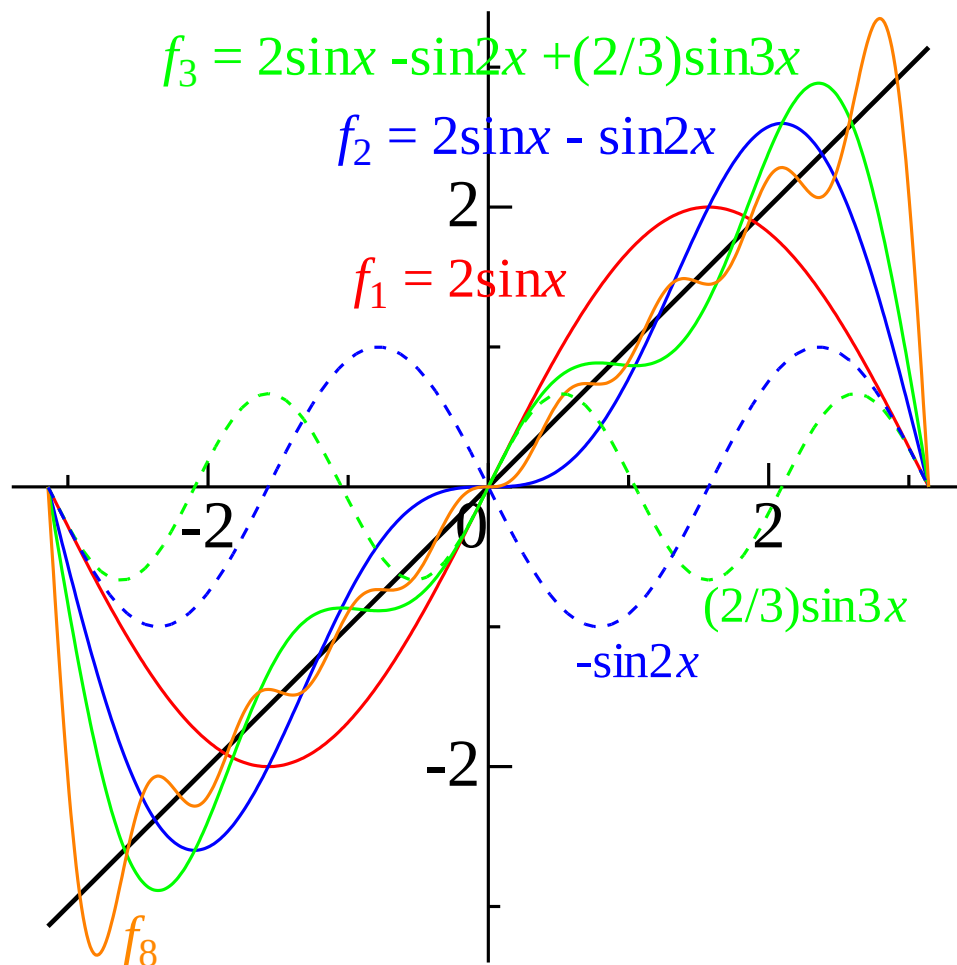
.....
 $f(x) = x$ についての直交基底ベクトル $\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ への正射影 ($[-\pi, \pi]$ における内積)

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された $f(x) = x$ のフーリエ級数

$$a'_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 0, \quad a'_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \quad (\text{奇関数と偶関数の積})$$

$$b'_n = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = \dots = \frac{2\sqrt{\pi}}{n} (-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \\ &= 2(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots) \end{aligned}$$



周期(波長) a の周期関数について

周期 2π $[-\pi, \pi]$ の周期関数は $\sin nx$ や $\cos mx$ の線形結合で表せる

周期 a $[-a/2, a/2]$ の周期関数の場合は $\sin(2\pi/a)nx$ や $\cos(2\pi/a)mx$ とすればよい

x	$-a/2$	$a/2$
$(2\pi/a)x$	$-\pi$	π

ちなみに物理の世界で $k = 2\pi/a$ は波数(ベクトル)に対応し、結晶固体物理では最少の逆格子ベクトルである(一般の逆格子ベクトルは $k_n = (2\pi/a)n$ と表せる)

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos^2\left(\frac{2\pi}{a}nx\right) dx = \frac{a}{2} \quad \text{ゆえ規格化した形は} \quad \frac{1}{\sqrt{a/2}} \cos\left(\frac{2\pi}{a}nx\right)$$

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{a}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{a}nx\right)}{\sqrt{a/2}} + b_n \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a}nx\right)}{\sqrt{a/2}} \right)$$

$$a_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{a}nx\right)}{\sqrt{a/2}} dx \quad b_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a}nx\right)}{\sqrt{a/2}} dx$$