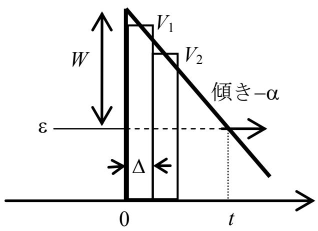
量子力学 I　期末試験問題（平成 24 年 6 月 29 日）

以下において、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った数を表わす。解答用紙にある各小問について答えよ。

問題 I.　A　有限な幅の階段型ポテンシャル（値 $V_0 > 0$、幅 a）に向ってエネルギー ε（$\varepsilon < V_0$）を持つ質量 m の粒子が単位時間当たり一定数で負の方向から次々と壁に向かってくる定常的な運動状態について考える。簡単のために階段型ポテンシャル部以外でのポテンシャルは零とする。このような場合にポテンシャルを透過する粒子の割合（透過率）は $\left[1+\dfrac{V_0^2 \sinh^2(a\lambda)}{4\varepsilon(V_0-\varepsilon)}\right]^{-1}$ で与えられる（この式は既知として使って良い）。但し $\lambda = \sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}(V_0-\varepsilon)}$ である。

B　右図のように、ポテンシャル $V(x)$ が連続的に減少している場合の透過率の ε 変化の様子を見積もってみよう。ここで、ポテンシャルの位置変化は緩やかであるとして、一定幅 Δ で高さが $V_1, V_2, ..., V_n$ と異なる連続した矩形ポテンシャルで $V(x)$ を近似することを考える。このとき、連続した矩形ポテンシャルに対する透過率は各矩形ポテンシャルに対する透過率の積の形 $T = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{16\varepsilon(V_i-\varepsilon)}{V_i^2} e^{-2\lambda_i \Delta}$ で表わせる。但し、$\lambda_i = \sqrt{\dfrac{2m(V_i-\varepsilon)}{\hbar^2}}$ である。



問題 II. 水素原子の電子に対する固有関数は、整数 n, l, m を用いて、動径部分と角度部分の積の形 $\varphi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta,\phi)$ で与えられる。このとき、エネルギー固有値は $E_n = -\dfrac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2}\dfrac{1}{n^2}$ と与えられ、具体的な値としては $\dfrac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \cong 13.6$ [eV]となる。ここで、ε_0 は真空の誘電率、a_0 はボーア半径 $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$、$m_e$ 及び e はそれぞれ電子の質量及び素電荷である。解答用紙にある各小問について答えよ。

参考

$$R_{nl}(r) = C_{nl}\left(\frac{r}{a_0}\right)^l e^{-\frac{1}{n}\frac{r}{a_0}} \cdot L_{n+l}{}^{2l+1}\left(2\frac{1}{n}\frac{r}{a_0}\right)$$ に関して：

$$C_{nl} = \left(\frac{2}{n}\right)^l \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3}} \quad , \quad L_q{}^p(\rho) = \sum_{k=0}^{q-p}(-1)^k \frac{(q!)^2}{(q-p-k)!(p+k)!k!}\rho^k \quad , \quad \int_0^\infty R_{nl}(r)R_{n'l}(r)r^2 dr = \delta_{nn'}$$

$$Y_l^m(\theta,\phi) = C'_{lm} \cdot P_l^{|m|}(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}$$ に関して：

$$C'_{lm} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \quad , \quad P_l^{|m|}(\cos\theta) = \sin^{|m|}\theta \frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^{|m|}}\left(\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d(\cos\theta)^l}(\cos^2\theta - 1)^l\right)$$

$$\iint Y_l^m(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$Y_l^m(\theta,\phi)$ は演算子 $\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$ の固有関数でその固有値は $-l(l+1)$

角運動量の大きさの二乗 $\left|\vec{l}\right|^2$ に対する演算子：　$\left|\vec{l}\right|^2 = -\hbar^2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$

角運動量の z 方向成分 l_z を表す演算子：　$l_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$

量子力学Ⅰ　期末試験解答用紙（平成 23 年 6 月 27 日）　　　　主専攻　　学籍番号　　　　氏名

問題 I. A（1）各領域におけるシュレディンガー方程式を具体的に記せ。

（2）上で答えたシュレディンガー方程式に対して、物理的に適した波動関数の一般形を答えよ。(その形とする理由説明がない場合は大幅減点。)

（3）入射波に対する透過波や反射波の振幅比を定めるための連立一次方程式を答えよ。(何故その関係（方程式）が得られるのか理由も述べよ。)

B（4）$V_1 >> \varepsilon$ として、最初の矩形ポテンシャル通過直後の透過率が $\dfrac{16\varepsilon(V_1-\varepsilon)}{V_1^2}e^{-2\lambda_1\Delta}$ と近似できることを示せ。

（5）べき関数よりも指数関数のほうが大きく変化するので、透過率変化の様子は主に $T \propto \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -2\lambda_i\Delta\right) \to \exp\left(\int_0^t (-2\lambda)dx\right)$ （$\Delta \to 0$ において）とすることができる。$x<0$ で $V(x)=0$、$x \geq 0$ で $V(x)=W+\varepsilon-\alpha x$ のとき、ある正定数β を用いて透過率は $T \propto \exp\left(-\beta W^{3/2}\right)$ と表わせることを示せ。

問題 II.（1）$\dfrac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$ となることを示せ。

（2）整数 n, l, m、及び関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ はそれぞれ何と呼ばれているか答えよ。

（3）エネルギー準位の様子（第 2 励起状態まで）を図示せよ。また、電子を束縛状態から解放するために必要なエネルギーの最小値を答えよ。

（4）φ_{100} で表わされる運動状態に対して、電子の存在確率が最大となる位置を答えよ。また、φ_{210} についても同様に答えよ。

（5）第 N 励起状態（N はある自然数）で運動しているとき、角運動量の大きさを測定すると最大値と最小値はいくらになるか答えよ。また、角運動量の z 方向成分ではどうか？

（6）$\varphi_{21+} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\varphi_{211}+\varphi_{21-1}\right)$ なる一次結合を r, x, y, z のうち必要なものを用いて表わせ（θ, ϕ は使わない。C_{nl} などの係数は計算せず残したままで可)。