量子力学Ⅰ演習　平成 26 年 6 月 11 日　　　　　　　　　　　　専攻　　　　　　学籍番号　　　　　　　　氏名

I. ラプラシアンや角運動量に関する演算子の極座標表示について考えよう。

（1）　$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$ を示せ。（r を x, y, z の関数と見なしたときの z 微小変化に対する r 変化率。$z = r\cos\theta$ の関係からは求められないことに注意）

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の両辺を z で偏微分すると、$2r\frac{\partial r}{\partial z} = 2z$。よって $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta$。

（2）　$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}$ を示せ。

$\tan^2\theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$ の両辺を z で偏微分すると、$\frac{2\tan\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = -2\frac{x^2+y^2}{z^3}$。よって $\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\cos^2\theta r^2\sin^2\theta}{\tan\theta r^3\cos^3\theta} = -\frac{\sin\theta}{r}$

（3）　$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ を示せ。

$\tan\phi = \frac{y}{x}$ の両辺を z で偏微分すると、$\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$。よって $\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$。（図形的に考えても明らか）

（4）　(1)~(3)の結果から、$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を計算せよ。（$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ や $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ に対しても、必ず一度は自分で計算してみること！）

$$\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$
$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$
$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

（5）　角運動量 $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p}$ に対する演算子は極座標表示で
$$\begin{cases} l_x = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ l_y = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ l_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \end{cases}$$
となる。l_y について、実際に計算して示せ。

$$l_y = zp_x - xp_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= -i\hbar\left(r\cos\theta\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - r\sin\theta\cos\phi\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right) = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

ちなみに、$l_x = yp_z - zp_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$
$$= -i\hbar\left(r\sin\theta\sin\phi\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - r\cos\theta\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right) = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$l_z = xp_y - yp_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$
$$= -i\hbar\left(r\sin\theta\cos\phi\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - r\sin\theta\sin\phi\left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

（6）　$l_\pm = l_x \pm il_y$ と定義するとき、$\frac{1}{2}(l_+l_- + l_-l_+) = {l_x}^2 + {l_y}^2$ となることを示せ。（$l_+l_- = (l_x + il_y)(l_x - il_y)$ などを実際に展開計算してみよ）

$$\frac{1}{2}(l_+l_- + l_-l_+) = \frac{1}{2}\left((l_x + il_y)(l_x - il_y) + (l_x - il_y)(l_x + il_y)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left({l_x}^2 + il_yl_x - il_xl_y + {l_y}^2\right) + \left({l_x}^2 - il_yl_x + il_xl_y + {l_y}^2\right)\right) = {l_x}^2 + {l_y}^2$$

（７）　極座標表示した l_x, l_y を $l_+ = l_x + il_y$ に代入・計算し $l_+ = \hbar e^{+i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$ となることを示せ。（ちなみに、$l_- = \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$ となる）

$$l_+ = i\hbar\left(\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right)=\hbar\left((\cos\phi+i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\left(\frac{i\cos\phi}{\tan\theta}-\frac{\sin\phi}{\tan\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$=\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$l_- = i\hbar\left(\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)-i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right)=\hbar\left(-(\cos\phi-i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta}+\left(\frac{i\cos\phi}{\tan\theta}+\frac{\sin\phi}{\tan\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$=\hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

（８）　（７）の結果を用いて $l_+l_- + l_-l_+ = -2\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\tan^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$ となることを示せ。（$l_- = \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$ は既知として良い）

$$l_+l_- + l_-l_+ = \hbar^2\left(e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right)$$
$$=\hbar^2\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+e^{i\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{-i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)-e^{i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(e^{-i\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+e^{i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(e^{-i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right)$$
$$+\hbar^2\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-e^{-i\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+e^{-i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(e^{i\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+e^{-i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(e^{i\phi}\frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right)$$
$$=\hbar^2\left(-2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{2}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{2}{\tan^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)=-2\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\tan^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

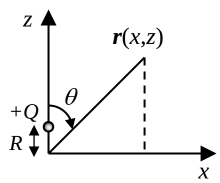
（９）　角運動量の大きさの二乗の演算子が $\vec{l}^2 = l_x{}^2 + l_y{}^2 + l_z{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$ となることを示せ。ヒント：(6)と(8)の結果を使う。

$\frac{1}{2}(l_+l_- + l_-l_+) = l_x{}^2 + l_y{}^2$ の関係を利用すると

$$\vec{l}^2 = \frac{1}{2}(l_+l_- + l_-l_+) + l_z{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\tan^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)+\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\tan^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$
$$=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)=-\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

Ⅱ．　真空中で点電荷+Q が原点から距離 R の z 軸上にあるとき、xz 平面上の位置 $\boldsymbol{r}(x,z)$での静電ポテンシャル$\phi(x,z)$を考える（但し$|R| < r = \sqrt{x^2+z^2}$）。

（１）$\phi(x,z)$を R, r, θ を用いて表せ（R, r, θ に関しては右図参照）。



$$\phi(x,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-R)^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - 2rR\cos\theta + R^2}}$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r\sqrt{1-2(R/r)\cos\theta+(R/r)^2}}$$

あるいは余弦定理を用いて電荷と位置 r との距離 $\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$ からも同様に求まる。

（２）ル・ジャンドル多項式 $P_n(\zeta)$ を用いて$\phi(x,z)$を表せ。ここで $P_n(\zeta)$ は母関数を用いて $g(t,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\zeta+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\zeta)t^n$ と表される（但し$|t|<1$）。

$t = \frac{R}{r}$、$\zeta = \cos\theta$ と変換すると、 $g(R/r, \cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-2(R/r)\cos\theta+(R/r)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^n$

従って、 $\phi(x,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\frac{R^n}{r^{n+1}}$