微分・積分 I 問題集 02　解答例

1. $\begin{cases} f^{(2m)}(0) = (-2)^m \cdot (2m-1)\cdot(2m-3)\cdots 1 \\ f^{(2m+1)}(0) = 0 \end{cases}$　（ m : 自然数 ）

2. $f^{(n)}(0) = n(n-1)\alpha^{n-2}\sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}(n-2)\right) + 2nx\alpha^{n-1}\sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right) + x^2\alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}n\right)$

3. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{O}(x^7)$

4. (1)　$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^4}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$　（収束半径　$+\infty$）

(2)　$\log(a^2 + x^2) = 2\log a + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^6 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \cdots$　（収束半径　$|a|$）

(3)　$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$　（収束半径　$+\infty$、注：展開式は $x \to 0$ のとき 1 に収束し、定義に等しくなる）

5. (1)　$f^{(n)}(x) = \frac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}}$　(2)　$f(x) = 1 + 2x + (2x)^2 + \cdots + (2x)^n + \frac{(2x)^{n+1}}{(1-2\theta x)^{n+2}}$　収束半径　1/2

6. (1)　$+\infty$　(2)　$|a|$　(3)　$+\infty$

7. (1)　$f(x) = 2 - 4(x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + R_4$　$R_4 = 0$　（元は 3 次多項式ゆえ 4 次以上の係数は 0）
(2)　省略

8. (1) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^5)$　(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^4)$　(3) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^4)$　(4)　1

9. (1)　$f'(x) = \frac{bc-ad}{(ax+b)^2}$、$f''(x) = \frac{-2a(bc-ad)}{(ax+b)^3}$、$f'''(x) = \frac{(-1)^2 3! a^2 (bc-ad)}{(ax+b)^4}$

(2)　$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n! a^{n-1}(bc-ad)}{(ax+b)^{n+1}}$　(3)　省略　(4)　$f(x) \approx \frac{d}{b} + \frac{bc-ad}{b^2}x - \frac{2a(bc-ad)}{b^3}x^2$

10. (1)　省略　(2)　$A(x) = 1 - x^2$　(3)　$B(x) = -(2n+1)x$、$C(x) = -n^2$　(4)　$f^{(n)}(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$

(5)　$f(x) \approx x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$

11.　$e^{-\frac{1}{x}}$、$x^2 \log x$、$\sin x$ と x（両者は同位）

12. (1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $-\frac{1}{4}$

13. (1)任意の x に対して絶対収束　(2)　$|a| < 1$ のとき $\frac{1}{(1-a^2)}$ に（絶対）収束、$|a| \geq 1$ のとき発散

(3)収束（対応する広義積分の収束値 $\int_2^\infty \frac{\log x}{x^2}dx = \frac{\log 2 + 1}{2}$ に問題の級数の収束値が等しくなるとは限らない）。

14. (1) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}a_0$　(2) $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$　(3)　収束半径+∞、よって $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n = a_0 e^{-x}$

15. (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$、$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$　(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x\log y}$、$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y\log x}{(\log y)^2}$

16. (1) $x^2+3y^2=1$の楕円　(2) 省略　(3) $dz=2xdx+6ydy$　(4) $2(x-1)+6(y-1)-(z-4)=0$

(5)単位ベクトル$\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$の方向、その方向の勾配の大きさは$2\sqrt{10}$

17. $3x+3y+z=0$

18. (1) $\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha\left(\cos(\alpha x+\beta y)-\sin(\alpha x+\beta y)\right)$、$\frac{\partial f}{\partial y}=\beta\left(\cos(\alpha x+\beta y)+\sin(\alpha x+\beta y)\right)$　(2) 省略

19. 省略

20. $f(h,\pi+k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(h+2k)^{2n}$

21. $f(x,y)\approx e^2\left(1+2x+2x^2+y^2+\frac{4}{3}x^3+3xy^2\right)$