H16 年度微分積分演習　No.25　('04/6/25)　学籍番号　　　　　　　　氏名

$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ とする。

1)　全微分を求めよ。

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$
、対称式ゆえ $f_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\therefore df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{1}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$$

2)　点 $(1,0)$ 及び $(1,1)$ における最大勾配の方向とその大きさを求めよ。

点 (x,y) における $f(x,y)$ の接平面は、xy 面内の勾配ベクトル $\left(f_x(x,y),f_y(x,y)\right)$ で表される方向に最大に傾いている。このことは、(x,y) を勾配ベクトルの方向に微小変化させたときに $f(x,y)$ は最大の変化を示すことを意味する。その最大の傾きは最大勾配と呼ばれ、勾配ベクトルの大きさ $\sqrt{\left(f_x(x,y)\right)^2+\left(f_y(x,y)\right)^2}$ で与えられる。

従って、点 $f(x,y)$ は点 $(1,0)$ においては $\left(f_x(1,0),f_y(1,0)\right)$ 方向、つまり $(1,0)$ 方向が最大勾配の方向であり、その大きさは $\sqrt{1^2+0^2}=1$、点 $(1,1)$ においては、$\left(f_x(1,1),f_y(1,1)\right)$ 方向、つまり $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 方向であり、その大きさは $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

3)　2 階の偏導関数を全て求めよ。また、$f_{xy}=f_{yx}$ となっていることを確かめよ。

$$f_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{x(-1)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x(-1)2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y(-1)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

4)　$f(x,y)$ がラプラスの方程式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ を満たすことを示せ。

2)の結果より　$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$