H16 年度微分積分演習　No.19　('04/6/10)　学籍番号　　　　　　　　　氏名

次の級数の収束性を調べよ。[正項級数の収束性を調べる代表的な方法：①収束する級数との比較（教科書 p.71 参照)、②ダランベールの比テスト（同 p.72)、③積分の利用（同 p.73)]

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$

$a_n=\dfrac{1}{n^2+n}$ として $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を考えると（ダランベールの比テスト)、

$$\frac{\dfrac{1}{n^2+n}}{\dfrac{1}{(n+1)^2+(n+1)}}=\frac{\dfrac{1}{1^2+\dfrac{1}{n}}}{\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}}\to 1 \quad (n\to\infty)$$ となるので判定不能

ところが、$\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n\cdot n}=\dfrac{1}{n^2}$ であり、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するので、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ も収束する。さらに、その部分は、$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}$

$\displaystyle\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=1$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ として $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を考えると（ダランベールの比テスト)、

$$\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}=\frac{\dfrac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)}}{n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e \quad (n\to\infty)$$ よって収束しない。

あるいは、$a_n=\dfrac{n^n}{n!}=\dfrac{n\cdot n\cdots n\cdot n}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}>n$ ゆえ、$n\to\infty$ のときに $a_n\to\infty$ となり、明らかに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ は収束しない。

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$

$a_n=\dfrac{1}{(\log n)^n}$ として $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を考えると（ダランベールの比テスト)、

$$\frac{\dfrac{1}{(\log(n+1))^{n+1}}}{\dfrac{1}{(\log n)^n}}=\frac{(\log n)^n}{\log(n+1)(\log(n+1))^n}=\frac{1}{\log(n+1)}\left(\frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^n\le\frac{1}{\log(n+1)}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

よって収束する。