H16 年度微分積分演習　No.18　('04/6/8)　　学籍番号　　　　　　　　氏名

Ⅰ．1)　2^x の n 階導関数を求めよ。

$$\frac{d}{dx}\left(2^x\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{(\log 2)x}\right)=e^{(\log 2)x}\cdot\log 2=2^x\log 2、\frac{d^2}{dx^2}\left(2^x\right)=\frac{d}{dx}\left(2^x\cdot\log 2\right)=2^x\left(\log 2\right)^2、\ \cdots\ 、\frac{d^n}{dx^n}\left(2^x\right)=2^x\left(\log 2\right)^n$$

（ちなみに 2^x は $-\infty<x<\infty$ で C^∞ －級である。）

2)　1)の結果を用いて 2^x のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー多項式＋剰余項 R_n）を求めよ。

$$2^x=2^0+\frac{2^0\cdot\log 2}{1!}x+\frac{2^0\cdot(\log 2)^2}{2!}x^2+\frac{2^0\cdot(\log 2)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{2^0\cdot(\log 2)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{2^{\theta x}\cdot(\log 2)^x}{n!}x^n\quad(0<\theta<1)$$

$$=1+(\log 2)x+\frac{(\log 2)^2}{2!}x^2+\frac{(\log 2)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(\log 2)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n\qquad\left(R_n=\frac{2^{\theta x}\cdot(\log 2)^n}{n!}x^n\right)$$

3)　任意の x に対して、2)で求めた剰余項 R_n が $n\to\infty$ のときに $R_n\to 0$ となることを示せ（$n\to\infty$ のときに $R_n\to 0$ となる場合、2^x はマクローリン級数で表すことが可能となる）。

任意の x に対して、$\left|R_n\right|=\left|\frac{2^{\theta x}\cdot(\log 2)^n}{n!}x^n\right|\le 2^{|x|}\frac{(x\log 2)^n}{n!}\to 0\quad(n\to\infty)$

（注：x は任意の有限確定値なので 2^x や $x\log 2$ も有限確定値、また任意の正数 α に対して $n\to\infty$ で $\frac{\alpha^n}{n!}\to 0$）

ちなみに、$e^y=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$ において $y=x\cdot\log 2$ とすれば、$-\infty<x<\infty$ に対して

$$2^x=\left(e^{\log 2}\right)^x=e^{x\cdot\log 2}=1+(\log 2)x+\frac{(\log 2)^2}{2!}x^2+\frac{(\log 2)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(\log 2)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\log 2)^k}{k!}x^k$$

Ⅱ．1)　$\begin{cases}\frac{\log(1+x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$　に対する $x=0$ を中心とする 2 次のテイラー多項式を求めよ（テイラーの定理からも直接は求められなくはないが、$\log(1+x)$ のテイラー多項式を x で割った式とみなして考えたほうが簡単）。

$-1<x\le 1$ かつ $x\neq 0$ のとき、$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)\right)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)$

（ちなみにこのテイラー多項式は $x=0$ のときに 1 となり、$x=0$ での場合にも適応可能である。）

2)　$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ に対して $x=0$ を中心とする 2 次のテイラー多項式を求めよ。

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(e^{\log(1+x)}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}=e^{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)\right)}=e\cdot e^{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)\right)}$$

$$=e\cdot\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)\right)+\frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)\right)^2}{2!}+O(x^3)\right)=e\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+O(x^3)\right)\approx e\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}\right)$$