H16 年度微分積分演習　No.17　('04/6/4)　学籍番号　　　　　　氏名

$f(x)=\sin^{-1}x$ のとき、$f(x)$ のマクローリン展開を求めよう（但し $-1<x<1$ とする）。

1)　$f'(x)$ を答えよ。

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$、

$y=\sin^{-1}x$ のとき $x=\sin y$ だから $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （注：$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ ゆえ $\cos y>0$）

2)　等式 $(1-x^2)\cdot f''(x)-x\cdot f'(x)=0$ が成り立つことを示せ。

$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}$ であるから、

$$(1-x)^2\cdot f''(x)-x\cdot f'(x)=(1-x^2)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}-x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

3)　2)の等式の両辺を n 回微分することで $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$ を示せ。

Leibniz の公式より、

$$\left((1-x)^2\cdot f''(x)\right)^{(n)}={}_nC_{n-2}\left((1-x^2)\right)^{(2)}\cdot\left(f''(x)\right)^{(n-2)}+{}_nC_{n-1}\left((1-x^2)\right)^{(1)}\cdot\left(f''(x)\right)^{(n-1)}+{}_nC_{n-n}\left((1-x^2)\right)^{(0)}\cdot\left(f''(x)\right)^{(n)}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2!}(-2)(1)\cdot f^{(n)}(x)+n(-2x)\cdot f^{(n+1)}(x)+(1-x^2)\cdot f^{(n+2)}(x)$$

$$\left(x\cdot f'(x)\right)^{(n)}={}_nC_{n-1}(x)^{(1)}\cdot\left(f'(x)\right)^{(n-1)}+{}_nC_{n-n}(x)^{(0)}\cdot\left(f'(x)\right)^{(n)}=n\cdot 1\cdot f^{(n)}(x)+x\cdot f^{(n+1)}(x)$$

$$\therefore\left((1-x)^2\cdot f''(x)-x\cdot f'(x)\right)^{(n)}=-n(n-1)f^{(n)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)+(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-nf^{(n)}(x)-xf^{(n+1)}(x)$$

$$=(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)$$

ここで考えている等式の右辺はゼロであるから、従って $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$

4)　3)の結果を用いて、漸化式 $f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$ が成り立つことを示せ。

$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$ において $x=0$ とすると、

$(1-0^2)f^{(n+2)}(0)-(2n+1)0f^{(n+1)}(0)-n^2f^{(n)}(0)=0$　　$\therefore\ f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$

5)　$f(x)=\sin^{-1}x$ をマクローリン展開せよ（6 次の係数まで求め、それ以上はランダウのオミクロン形式でよい）。

4)の結果より、$f^{(2)}(0)=0^2f^{(0)}(0)=0$、$f^{(3)}(0)=1^2\cdot f^{(1)}(0)=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}}=1$、$f^{(4)}(0)=2^2f^{(2)}(0)=0$、

$f^{(5)}(0)=3^2f^{(3)}(0)=9\cdot 1=9$、$f^{(6)}(0)=4^2\cdot f^{(4)}(0)=4^22^2f^{(2)}(0)=0$ ゆえ、

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6+O(x^7)$$

$$=0+1\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{9}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6+O(x^7)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+O(x^7)$$