H16 年度微分積分演習　No.15　('04/5/28)　学籍番号　　　　　　　　　　氏名

1)　$f(x)=\cos x-1$ は $x\to 0 \Rightarrow f(x)\to 0$ となる。$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$ が 0 でない有限値となるような自然数 n を求めよ。（このような $f(x)$ は x に対して n 位の無限小と呼ばれる（$x\to 0$ で x^n と同程度で $f(x)\to 0$ になるということ））。

マクローリン展開より

$$f(x)=\cos x-1=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\pi+\theta x)x^{2n}}{(2n)!}\right)-1$$

$$=-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\pi+\theta x)x^{2n}}{(2n)!}$$

次数が高いほど $x\to 0$ のとき急速にゼロに近づくので、$f(x)$ の展開における最低次数に注意して $\frac{f(x)}{x^n}$ を考えると、

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\pi+\theta x)x^{2n}}{(2n)!}}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^4}{6!}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-4}}{(2n-2)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\pi+\theta x)x^{2n-2}}{(2n)!}\to -\frac{1}{2}\qquad (x\to 0)$$

よって、$n=2$ とすればよい。

注：$f(x)=\cos x-1=-\frac{\cos(2\pi+\theta x)x^2}{2!}$ で止めても、$x\to 0$ のとき $\theta x\to 0$ ゆえ同じ結果が得られる。

2)　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、$f(x)-f(a)=A(x-a)+o(|x-a|)$ と表されることを示せ。また、$(x-a)$ の係数 A が何に相当するか答えよ。（$o(|x-a|)$ とは $x\to a$ で $\frac{g(x)}{|x-a|}\to 0$ となるような関数 $g(x)$ を意味する）

（$f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\Leftrightarrow$ $x\to a$ のとき $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\to f'(a)$　を考慮して、$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$ を考える）

$\varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$ と置くと、$f(x)$ は $x=a$ で微分なので $x\to a\Rightarrow \varepsilon(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\to 0$　となる。

$\varepsilon(x)$ の式を変形すると　$f(x)-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)+\varepsilon(x)\cdot(x-a)$

このとき $x\to a\Rightarrow \left|\frac{\varepsilon(x)\cdot(x-a)}{|x-a|}\right|=|\varepsilon(x)|\to 0$ となるので、$\varepsilon(x)\cdot(x-a)$ は $|x-a|$ に対して高位の無限小となる。

従って $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき、$f(x)-f(a)=A(x-a)+o(|x-a|)$ と表すことが可能であり、その時の $(x-a)$ の係数 A が $x=a$ での微係数に相当する。

逆に $f(x)-f(a)=A(x-a)+o(|x-a|)$ となる場合、$x\to a\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A+\frac{o(|x-a|)}{x-a}\to A$ となるので、微係数 A が存在する、つまり $x=a$ で微分可能である。