H15 年度微分積分演習　No.11　('04/5/18)　学籍番号　　　　　　　　氏名

Ⅰ. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$ は収束するか答えよ。

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{h \to -0} \int_{-1}^{h} \frac{1}{x} dx + \lim_{h \to +0} \int_{h}^{1} \frac{1}{x} dx$$

この時、$\lim_{h\to -0}\int_{-1}^{h}\frac{1}{x}dx$ 及び $\lim_{h\to +0}\int_{h}^{1}\frac{1}{x}dx$ は収束しないので、$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$ も収束しない。

Ⅱ. $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$　$(s > 0)$　が収束することを示そう（この広義積分はガンマ関数と呼ばれる）。

1)　$\Gamma_1(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx$ が収束することを示せ（ヒント：$x \geq 0$ で $0 \leq \frac{x^{s-1}}{e^x} \leq x^{s-1}$）。

$x > 0$ で $0 < \frac{x^{s-1}}{e^x} < x^{s-1}$ ゆえ、$\int_h^1 x^{s-1} e^{-x} dx \leq \int_h^1 x^{s-1} dx$

ここで $s-1 > -1$ ゆえ、$\int_0^1 x^{s-1} dx = \lim_{h\to +0}\int_h^1 x^{s-1}dx$ は収束する。従って $\Gamma_1(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx$ も収束する。

2)　$\Gamma_2(s) = \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ が収束することを示し、1)の結果と合わせることで $\Gamma(s)$ が収束することを示せ（ヒント：$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ であるので、十分大きな $x$ に対しては $\left|x^2\right|\left|\frac{x^{s-1}}{e^x}\right| = \left|\frac{x^{s+1}}{e^x}\right| \leq 1$）。

$x^{s-1}e^{-x}$ は $[1,\infty)$ で連続ゆえ $b \in [1,\infty)$ なる $b$ に対して $\int_1^b x^{s-1} e^{-x} dx$ は存在する。また、十分大きな $b$ を考えると、$x > b$ となる $x$ に対して $\left|x^2\right|\left|\frac{x^{s-1}}{e^x}\right| = \left|\frac{x^{s+1}}{e^x}\right| \leq 1$ となるので $\left|\frac{x^{s-1}}{e^x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$。この時、

$\int_b^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx$ は収束するので、$\Gamma_2(s) = \int_1^b x^{s-1} e^{-x} dx + \int_b^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ も収束する。

1)、2)より $\Gamma_1(s) + \Gamma_2(s) = \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ は収束する。

3)　$\Gamma(n)$　$(n = 1, 2, 3, ....)$　を求めよ。

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{n-1} (-e^{-x})' dx = \left[-x^{n-1}e^{-x}\right]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty x^{n-2} e^{-x} dx$$

ここで、$\left[-x^{n-1}e^{-x}\right]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx = \left[-0+0\right] + (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)\Gamma(n-1)$ ゆえ、

$$(n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)$$

さらに $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -0+1 = 1$ ゆえ、$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$