H16 年度微分積分演習　No.10　('04/5/14)　学籍番号　　　　　　　　氏名

I. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}dx$ を求めよう。

1) $\displaystyle\frac{x+2}{x^2-4x+3}$ を $\displaystyle\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-3}$ の形に部分分数に分解した場合の α, β の値を求めよ。

$$\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-3}=\frac{\alpha(x-3)+\beta(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{(\alpha+\beta)x+(-3\alpha-\beta)}{x^2-4x+3}$$

上式は常に成り立たなければいけないので、$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ -3\alpha-\beta=2\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}\alpha=-\dfrac{3}{2}\\ \beta=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}dx$ を計算せよ。

1)より $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}dx=\int\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}\frac{1}{x-3}\right)dx=-\frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{5}{2}\log|x-3|+C$

II. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-ax+a^2}dx$ を計算せよ。(ヒント：分母の次数＜分子の次数なので、分子を分母で割ってみる。)

$$\int \frac{x^3}{x^2-ax+a^2}dx=\int \frac{x^3+a^3-a^3}{x^2-ax+a^2}dx=\int \frac{(x^2-ax+a^2)(x+a)-a^3}{x^2-ax+a^2}dx=\int\left((x+a)-\frac{a^3}{(x-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}\right)dx$$

$$\therefore \int \frac{x^3}{x^2-ax+a^2}dx=\frac{x^2}{2}+ax-a^3\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}\right)\right]+C=\frac{x^2}{2}+ax-\frac{2a^2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-a}{\sqrt{3}a}\right)+C$$

III. $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ と置き、$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ を計算せよ。

$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とするとき、$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$、$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+t^2}{2}$ ゆえ、

$$\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{1}{t}dt=\log|t|+C=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$