H16 年度微分積分演習　No.8　('04/5/7)　　学籍番号　　　　　　氏名

Ⅰ. $\int_0^{\pi}(x\cos\ x+\sin\ x)dx$ を微分積分の基本定理（教科書 p.37、定理５）を利用して計算しよう。

1)　$f(x)=x\cos x+\sin x$ は $[0,\pi]$ で連続かどうか答えよ。

$[0,\pi]$ において、x、$\cos x$、$\sin x$ は連続ゆえ、$f(x)=x\cos x+\sin x$ も連続である。

2)　$F'(x)=f(x)$ となる $F(x)$ を試行錯誤的に求めよ。

$F(x)=x\sin x+C$ とすると（C：任意定数)、
$F'(x)=(x)'\cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'+(C)'=1\cdot\sin x+x\cos x+0=f(x)$
$\therefore F(x)=x\sin x+C$　（ちなみに $F(x)$ は $[0,\pi]$ において微分可能な関数である。）

3)　$\int_0^{\pi}f(x)dx=F(\pi)-F(0)$ であることを利用して、$\int_0^{\pi}(x\cos\ x+\sin\ x)dx$ の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=F(\pi)-F(0)=\pi\sin\ \pi+C-(0\sin\ 0+C)=0$$

Ⅱ.　同様にして $\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2+9}dx$ を求めよう。

1)　$f(x)>0$ かつ $g(x)=\log\bigl(f(x)\bigr)$ のとき、$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ であることを示せ。

$$g'(x)=\frac{dg\bigl(f(x)\bigr)}{d\bigl(f(x)\bigr)}\cdot\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{d\bigl(f(x)\bigr)}\log\bigl(f(x)\bigr)\cdot\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

2)　被積分関数の分母と分子の関係に注意して、$\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2+9}dx$ を求めよ。

$G(x)=\log\left|x^2+9\right|+C=\log(x^2+9)+C$ とすると（C は任意定数、また常に $x^2+9>0$）

$G(x)=\log(x^2+9)+C$ は $[-1,2]$ において微分可能であり、その導関数は $\frac{d}{dx}\bigl(\log(x^2+9)+C\bigr)=\frac{2x}{x^2+9}$ となり被積分関数に一致し、この関数は $[-1,2]$ で連続ゆえ定積分が存在する。

$$\therefore\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2+9}dx=G(2)-G(-1)=\log(2^2+9)-\log((-1)^2+9)=\log 13-\log 10=\log 1.3$$

Ⅲ. $\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2-1}dx$ の場合には上と同様な手順で求めることが出来ない。理由を考えよ。

$H(x)=\log\left|x^2-1\right|+C$ は $x=\pm1$ で微分不可能（被積分関数 $\frac{2x}{x^2-1}$ は $x=\pm1$ で不連続）であるから。