H16 年度微分積分演習　No.7　('04/5/6)　　学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$ を区分求積で示そう。

1)　$[0, \frac{\pi}{2}]$ を n 等分するとき、$i \in [0, n]$ 番目の座標 x_i を i, n, π を用いて表せ。

$$x_i = \frac{\pi}{2n} i$$

2)　$S(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[M_i (x_i - x_{i-1}) \right]$ という和を考える（ここで M_i は $[x_{i-1}, x_i]$ における $\cos x$ の最大値を表す)。
$\theta = x_i - x_{i-1}$ とするとき、$S(\Delta_n) = \theta\left(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta\right)$ と表されることを示せ。

$\cos x$ は $[0, \frac{\pi}{2}]$ で単調減少ゆえ、$\cos x_{i-1} > \cos x_i$。また、$\theta = \dfrac{\pi}{2n}$ であるから

$$S(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[M_i (x_i - x_{i-1}) \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\cos x_{i-1} \cdot \frac{\pi}{2n} (i - (i-1)) \right] = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left[\cos \frac{\pi}{2n} (i-1) \right]$$

$$\therefore S(\Delta_n) = \theta\left(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta\right)$$

3)　$\sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta\right) = \sin\dfrac{n\theta}{2} \cos\dfrac{(n-1)\theta}{2}$ となることを示せ。

$$\sin\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta\right) = \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos 2\theta + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos 3\theta + \cdots + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos(n-1)\theta$$

ここで　$\sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \cos n\theta = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(\dfrac{\theta + n\theta}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{\theta - n\theta}{2}\right) \right] = \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{(n-1)\theta}{2}\right) \right]$　ゆえ、

$$\sin\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta\right) = \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{5\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} + \cdots + \sin\frac{(2n-1)\theta}{2} - \sin\frac{(2n-3)\theta}{2} \right]$$

$$\therefore \sin\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{(2n-1)\theta}{2} \right]$$

さらに $\dfrac{1}{2}\left[\sin\dfrac{\theta}{2} + \sin\dfrac{(2n-1)\theta}{2} \right] = \dfrac{1}{2}\left[2\sin\left(\dfrac{\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-1)\theta}{2}}{2} \right) \cos\left(\dfrac{\frac{\theta}{2} - \frac{(2n-1)\theta}{2}}{2} \right) \right] = \sin\dfrac{n\theta}{2} \cos\dfrac{(1-n)\theta}{2} = \sin\dfrac{n\theta}{2} \cos\dfrac{(n-1)\theta}{2}$

$$\therefore \sin\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta\right) = \sin\frac{n\theta}{2} \cos\frac{(n-1)\theta}{2}$$

4)　2)、3)の結果を用いて、$\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n)=1$を示せ。

2)、3)　より

$$S(\Delta_n)=\theta\left(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta\right)=\theta\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n-1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}}\qquad\left(\because n\theta=\frac{\pi}{2}\right)$$

ここで、$n\to\infty$のとき$\theta=\dfrac{\pi}{2n}\to 0$ゆえ、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(\Delta_n)=\lim_{\theta\to 0}2\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=1$

5)　$s(\Delta_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[m_i(x_i-x_{i-1})\right]$という和を考えた場合（ここで$m_i$は$[x_i,x_{i-1}]$における$\cos x$の最小値を表す)、

$\lim_{n\to\infty}s(\Delta_n)=1$となることを示せ。

同様にして

$$s(\Delta_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[m_i(x_i-x_{i-1})\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\cos x_i\cdot\frac{\pi}{2n}(i-(i-1))\right]=\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\frac{\pi}{2n}i\right]$$
$$\therefore s(\Delta_n)=\theta\left(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta\right)$$

ここで

$$s(\Delta_n)=\theta\left(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta\right)=\theta\left(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos\frac{\pi}{2}\right)=\theta\left(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta+0\right)$$

ゆえ、

$$s(\Delta_n)=\theta\left(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta\right)=\theta\left(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta-1\right)=S(\Delta_n)-\theta$$

（注：つまり$S(\Delta_n)-s(\Delta_n)=\theta$である）

$$\therefore\lim_{n\to\infty}s(\Delta_n)=\lim_{n\to\infty}\left[S(\Delta_n)-\theta\right]=1$$

従って$\lim_{n\to\infty}s(\Delta_n)=\lim_{n\to\infty}S(\Delta_n)=1$と同じ値に収束するので、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$は存在し、その値は 1 である。