H15 年度微分積分演習　No.6　('04/4/27)　学籍番号　　　　　　　　氏名

関数 $f(x)=\cos^{-1}x+\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ は一定値となることを示そう　($0<x<1$ とする)。

1．$f'(x)$ を求めることにより示せ。

$$f'(x)=\left(\cos^{-1}x+\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=0$$

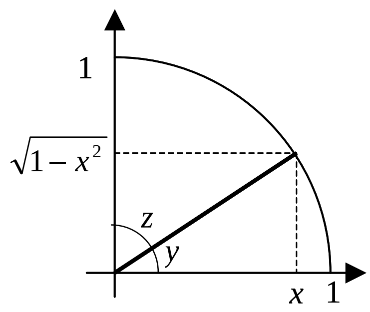
$0<x<1$ ゆえ $\sqrt{x^2}=x$ ！。

よって $f(x)$ は一定。仮に $x=\dfrac{1}{2}$ とすると $\cos^{-1}\dfrac{1}{2}+\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$

2．右図を用いて。

$\cos^{-1}x$ は右図の x 軸と動径方向のなす角（偏角）、

$\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ は y 軸と動径方向のなす角（余角）であるから、その和は $\dfrac{\pi}{2}$。



3．①：$y=\cos^{-1}x$、②：$z=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ とおき、それぞれの定義域及び値域を考える。次に通常の三角関数に戻し（但し②では $\sqrt{1-x^2}$ を z で表す)、$\sqrt{1-x^2}$ に y を代入して $\cos z$ と $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$ の関係を調べる。

$$y=\cos^{-1}x、\begin{cases}0<x<1\\ \dfrac{\pi}{2}>y>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=\cos y、\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}>y>0\\ 0<x<1\end{cases}$$

$$z=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}、\begin{cases}0<x<1\\ 0<z<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{1-x^2}=\cos z、\begin{cases}0<z<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<x<1\end{cases}\quad \text{ちなみにこの時}\begin{cases}0<z<\dfrac{\pi}{2}\\ 1>\sqrt{1-x^2}>0\end{cases}$$

$\dfrac{\pi}{2}>y>0$ に注意すれば、$\cos z=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sin y=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$

ここで $0<x<1$ に対し $\dfrac{\pi}{2}>y>0$ ゆえ $0<\dfrac{\pi}{2}-y<\dfrac{\pi}{2}$ となり、これは z の変域 $0<z<\dfrac{\pi}{2}$ に一致する。

さらに考えている区間内で cos 関数は 1 対 1 対応ゆえ、$z=\dfrac{\pi}{2}-y$ とならなければいけない。

よって、$f(x)=y+z=y+\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{\pi}{2}$