H16 年度微分積分演習　No.5　(’04/4/23)　 学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

$y=\tan x$ の逆関数 $y=\tan^{-1}x$ について考えよう（$\tan^{-1}x$ は $\dfrac{1}{\tan x}$ ではない！）。

1)　 $y=\tan x$ が 1 価関数となるためには定義域をどう定めれば良いか答えよ（値域も示せ）。

$y=\tan x$ は $-\infty<x<\infty$ で定義可能で、x と $x+2n\pi$ (n：自然数)で値が等しくなる、2π を周期とする多価関数である。ところが定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に限定すると、この区間内では常に単調増加な関数（$y'=(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x>0$）になり、逆関数を定義することが可能となる。そのときの値域は $-\infty<y<\infty$ である。

2)　 $y=\tan^{-1}x \Leftrightarrow x=\tan y$ に注意して、$\tan^{-1}x$ の導関数を逆関数の導関数に関する定理を使って求めよ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\tan y)}=\underbrace{\frac{1}{\sec y}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{\dfrac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}}_{\text{何とかして従属変数の } y \text{ ではなく独立変数である } x \text{ で表す！}}$$

3)　 $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　($x>0$)　とする時、$f\left(\sqrt{3}\right)$及び $f(1)$の値を求めよ。また $f'(x)$ を計算せよ。

$y=\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}=\tan y$　　$\therefore\ y=\dfrac{\pi}{3}$　　　同様に $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ f\left(\sqrt{3}\right)=\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$　　　また $f(1)=\tan^{-1}(1)+\tan^{-1}(1)=2\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

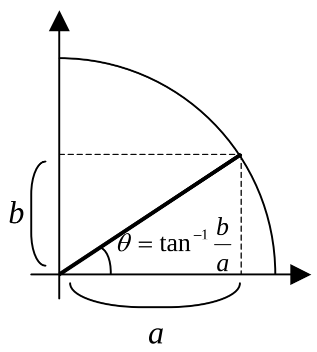
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

参考： $x>0$ ゆえ $2/\pi>y>0$

$x=\tan y=\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}$　　$\therefore\ \dfrac{1}{x}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$　　$\therefore\ \tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=y+\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{\pi}{2}$

図で考えると一目瞭然。

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}$$



$\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\tan\theta$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta=\tan^{-1}\dfrac{a}{b}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\theta)$