# ベクトル解析

平成 20 年 4 月 20 日

# 目 次

# 第1章　基礎事項

## 1.1　微分積分

### 偏微分

変数 $x$, $y$, $z$ の関数 $f = f(x, y, z)$ について

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

を $f$ の $x$ による 1 階の**偏微分**という．$y$, $z$ による偏微分についても同様に定義する．ここで, 左辺の () につけた添え字 $yz$ は偏微分を行うさいに $y$, $z$ を一定とみなすことを意味する．本書では主にこの記法をもちいるが, 偏微分を表すのに

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \partial_x f \tag{1.2}$$

などの記法も多くもちいられる．ただし, あとの 2 つの記法においては偏微分を行うさいに一定とみなす変数が明示されていないので, これらの記法をもちいるときには一定とみなす変数が何であるかについて注意する必要がある．1 階の偏微分は, **テイラー展開**

$$\begin{aligned} &f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &= f(x, y, z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \Delta z + \cdots \end{aligned} \tag{1.3}$$

において, 変数 $x$, $y$, $z$ の変化 $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ について 1 次の項の係数としてあらわれる．(1.3) における $\cdots$ は変数の変化について 2 次以上の項を表す．

### 全微分

変数 $x$, $y$, $z$ の微小変化 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ にともなう $f$ の微小変化

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \mathrm{d}z \tag{1.4}$$

を $f$ の**全微分**という．いま, 関数 $g$, $h$ を一定とするもとでの $f$ の微小変化を

$$(\mathrm{d}f)_{gh} \tag{1.5}$$

と表すことにしよう．特に, $g = f$ または $h = f$ ならば

$$(\mathrm{d}f)_{gh} = 0 \tag{1.6}$$

である．このことに注意すると

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}f)_{yz} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} (\mathrm{d}x)_{yz} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} (\mathrm{d}y)_{yz} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} (\mathrm{d}z)_{yz} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} (\mathrm{d}x)_{yz}\end{aligned} \tag{1.7}$$

と書けるから, 両辺を $(\mathrm{d}x)_{yz}$ で割ると

$$\frac{(\mathrm{d}f)_{yz}}{(\mathrm{d}x)_{yz}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \tag{1.8}$$

が成り立つ．また, $x$, $y$, $z$ がもう 1 組の変数 $u$, $v$, $w$ によって

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w) \tag{1.9}$$

と表される場合, $v$, $w$ を一定にすると

$$(\mathrm{d}f)_{vw} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} (\mathrm{d}x)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} (\mathrm{d}y)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} (\mathrm{d}z)_{vw} \tag{1.10}$$

であるから, 両辺を $(\mathrm{d}u)_{vw}$ で割ると

$$\frac{(\mathrm{d}f)_{vw}}{(\mathrm{d}u)_{vw}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \frac{(\mathrm{d}x)_{vw}}{(\mathrm{d}u)_{vw}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \frac{(\mathrm{d}y)_{vw}}{(\mathrm{d}u)_{vw}} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \frac{(\mathrm{d}z)_{vw}}{(\mathrm{d}u)_{vw}}\,, \tag{1.11}$$

つまり,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} \tag{1.12}$$

となる．$v$, $w$ による偏微分についても同様に考えると，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz}\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \tag{1.14}$$

が成り立つことがわかる．(1.12), (1.13), (1.14) は**連鎖律**とよばれ，変数変換において偏微分の変換則を与える極めて重要な関係式である．

## ヤコビ行列とヤコビアン

連鎖律 (1.12), (1.13), (1.14) は**ヤコビ行列** $\partial[x,y,z]/\partial[u,v,w]$ を

$$\frac{\partial[x,y,z]}{\partial[u,v,w]} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

によって定義すると

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu} \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv}\right] = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy}\right]\frac{\partial[x,y,z]}{\partial[u,v,w]} \tag{1.16}$$

と表すことができる．また，ヤコビ行列の行列式を**ヤコビアン**といい，$\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$ によって表す．つまり，

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} & \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \end{vmatrix} \tag{1.17}$$

である. (1.16) の $f$ として $r$, $s$, $t$ を考えると, ヤコビ行列は関係式

$$\frac{\partial[\,r,s,t\,]}{\partial[x,y,z]}\frac{\partial[x,y,z]}{\partial[u,v,w]} = \frac{\partial[\,r,s,t\,]}{\partial[u,v,w]} \tag{1.18}$$

を満たすことがわかる. その結果, ヤコビアンも同様な関係式

$$\frac{\partial(\,r,s,t\,)}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{\partial(\,r,s,t\,)}{\partial(u,v,w)} \tag{1.19}$$

を満たす.

## 1.2　線形代数

### 内積

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間に

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{1.20}$$

によって**内積**を定義する. ここで, $|\boldsymbol{a}|$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表し, また, $\theta$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす角である. 内積については

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\\
&(2)\ \ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2\\
&(3)\ \ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\\
&(4)\ \ (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\
&(5)\ \ \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

が成り立つ. また, 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.22}$$

と表すことができ, 同時に,

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{1.23}$$

を満たすベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を**正規直交基底**という. このとき, (1.22) における**基底ベクトル** $\boldsymbol{e}_i$ の係数 $a_i$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ のこの基底に関する第 $i$ 成分という. ベクトルの成分をもちいるとベクトルの長さは

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1.24}$$

と表され, また, 内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{1.25}$$

と表される.

## 外積

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$) から新たなベクトル $\boldsymbol{c}$ を 3 つの要請

$$\begin{aligned} &(1)\ \ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}\ \text{かつ}\ \boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c} \\ &(2)\ \ |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta \\ &(3)\ \ \det[\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,] \geq 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

を満たすようにつくる．ここで, 要請 (2) における $\theta$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角のうち小さいほうであるとする．また, 要請 (3) における行列式 $\det[\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,]$ のベクトルの成分は, 回転によって $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ に重ねることができる正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ についてのものであるとする．ただし, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のうち少なくとも一方が $\boldsymbol{0}$ のときは $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ と定める．(1.26) の要請 (1), (2), (3) を満たすようにつくったベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**とよび $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と書く．要請 (2) によって $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ によってつくられる平行四辺形の面積であり, また, 要請 (3) によってその向きは $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に重ねるように右ネジを回すときにネジが進む向きである．この項目の最後で示すように, 外積はベクトルの成分をもちいると

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 \tag{1.27}$$

と表せる．これを

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.28}$$

と書くと覚えやすい．外積については

$$\begin{aligned} &(1)\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \\ &(2)\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \\ &(3)\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b} \\ &(4)\ \ (\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \\ &(5)\ \ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{1.29}$$

が成り立つ．さて, (1.26) の要請 (1), (2), (3) から (1.27) を導こう．まず, 要請 (1) から

$$
\begin{aligned}
a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \\
b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

である．これら 2 式をもちいると容易に

$$
\begin{aligned}
(a_1b_2 - a_2b_1)\,c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_3 = 0 \\
-(a_1b_2 - a_2b_1)\,c_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,c_3 = 0
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

を示せる．したがって,

$$
c_1 : c_2 : c_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{1.32}
$$

あるいは, パラメータ $t$ をもちいて

$$
\boldsymbol{c} = t\left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 \right) \tag{1.33}
$$

と書ける．次に, 要請 (2) から

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{c}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

となるから, (1.33) における $t$ は $+1$ または $-1$ のいずれかであることがわかる．さらに, 要請 (3) から

$$
\begin{aligned}
\det[\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \\
&= t\left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right) \geq 0
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

であるから, $t = +1$ でなければならないことがわかる．以上によって, (1.26) の要請 (1), (2), (3) から (1.27) が導かれた．

## スカラー 3 重積とベクトル 3 重積

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ からつくられた

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{1.36}$$

を**スカラー 3 重積**という．スカラー 3 重積は

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1.37}$$

と表すことができる．この表式から

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{1.38}$$

が成り立つことがわかる．幾何学的には, スカラー 3 重積は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ からつくられる平行六面体の体積を表す．ただし, スカラー 3 重積で表される体積は正であることも負であることもある．$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ が正のとき, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は**右手系**をなすといい, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ が負のとき, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は**左手系** をなすという．また,

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{1.39}$$

を**ベクトル 3 重積**という．ベクトル 3 重積については, **ラグランジュの公式**

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1.40}$$

が成り立つ．なお, 外積については結合律が成り立たない, つまり, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ と $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ とは必ずしも等しくないという点に注意する必要がある．

## 基底変換と基底変換行列

2 組の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ を考え, $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ を $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ によって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_u &= P_{11}\, \boldsymbol{e}_x + P_{21}\, \boldsymbol{e}_y + P_{31}\, \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_v &= P_{12}\, \boldsymbol{e}_x + P_{22}\, \boldsymbol{e}_y + P_{32}\, \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_w &= P_{13}\, \boldsymbol{e}_x + P_{23}\, \boldsymbol{e}_y + P_{33}\, \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{1.41}$$

と表そう．このとき, 係数 $P_{ij}$ を並べてつくった行列

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

を $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$ から $\boldsymbol{e}_u,\ \boldsymbol{e}_v,\ \boldsymbol{e}_w$ への**基底変換**を表す**基底変換行列**という．(1.41) は行列記法をもちいると

$$[\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\,P \tag{1.43}$$

と書ける． $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は正規直交基底であるから, (1.41) の各式において $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ と両辺の内積をとることによって

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_v & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_w \\ \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_v & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_w \\ \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_v & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_w \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

であることがわかる. 逆に, $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ によって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x &= Q_{11}\,\boldsymbol{e}_u + Q_{21}\,\boldsymbol{e}_v + Q_{31}\,\boldsymbol{e}_w \\ \boldsymbol{e}_y &= Q_{12}\,\boldsymbol{e}_u + Q_{22}\,\boldsymbol{e}_v + Q_{32}\,\boldsymbol{e}_w \\ \boldsymbol{e}_z &= Q_{13}\,\boldsymbol{e}_u + Q_{23}\,\boldsymbol{e}_v + Q_{33}\,\boldsymbol{e}_w \end{aligned} \tag{1.45}$$

と表すときに現れる係数 $Q_{ij}$ を並べてつくった行列 $Q$ についても (1.44) と同様な関係

$$Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_w \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_w \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_w \cdot \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

が成り立つ．したがって, 内積の性質 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ に注意すると, $Q$ は $P$ の転置行列 ${}^tP$ であることがわかる．つまり,

$$Q = {}^tP \tag{1.47}$$

である．一方, (1.45) を

$$[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z] = [\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w]\,Q \tag{1.48}$$

と書けば, (1.43) から明らかなように, $Q$ は $P$ の逆行列 $P^{-1}$ であることがわかる. つまり

$$Q = P^{-1} \tag{1.49}$$

である. したがって, (1.47) と (1.49) から

$$P^{-1} = {}^tP \tag{1.50}$$

が成り立つ. (1.50) のように, 逆行列が転置行列によって与えられる行列を**直交行列**という. 以上のように, 正規直交基底の間の基底変換を表す基底変換行列は直交行列であることがわかる. なお, 直交行列については ${}^tPP = I$ であるから $\det P = +1$ または $-1$ である. $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ がともに右手系またはともに左手系のとき $\det P = +1$ であり, これに対し, 一方が右手系でもう一方が左手系のとき $\det P = -1$ である. 通常は正規直交基底として右手系のものを使うのが慣例である. 最後に, 基底変換にともなうベクトルの成分の間の変換則を導こう. ベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ によって

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w]\begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} \tag{1.51}$$

と表すとわかるように,

$$\begin{bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

の関係が成り立つ. (1.52) が基底変換にともなうベクトルの成分の間の変換則である.

# 第 2 章　場と座標

## 2.1　スカラー場とベクトル場

空間の各点 $\boldsymbol{r}$ においてスカラー $f(\boldsymbol{r})$ が定まるとき, $f$ を**スカラー場**という．また, 空間の各点 $\boldsymbol{r}$ においてベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が定まるとき, $\boldsymbol{A}$ を**ベクトル場**という．ベクトル場について注意する必要があるのは, 各点 $\boldsymbol{r}$ ごとにその点に付随するベクトル空間をそれぞれ考えなければならないという点である．この意味で, 無限個のベクトル空間における $\boldsymbol{r}$ の変化にともなうベクトルの変化を微分積分によってあつかう数学的手段がベクトル解析であるといえる．

## 2.2　直交曲線座標

### 直交曲線座標

空間の 2 点 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を結ぶ微小変位 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を**線素ベクトル**という．線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は直交座標 $(x, y, z)$ をもちいると

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\ \boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\ \boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\ \boldsymbol{e}_z \tag{2.1}$$

と表される．いま, 点 $\boldsymbol{r}$ の直交座標 $(x, y, z)$ がもう 1 組の座標 $(u, v, w)$ によって

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w) \tag{2.2}$$

と表される場合を考える．このとき $x$, $y$, $z$ の全微分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} \mathrm{d}u + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} \mathrm{d}v + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \mathrm{d}w \\
\mathrm{d}y &= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} \mathrm{d}u + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} \mathrm{d}v + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \mathrm{d}w \\
\mathrm{d}z &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} \mathrm{d}u + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} \mathrm{d}v + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \mathrm{d}w
\end{aligned} \tag{2.3}$$

であるから, これを (2.1) にもちいると線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}u\,\boldsymbol{r}_u + \mathrm{d}v\,\boldsymbol{r}_v + \mathrm{d}w\,\boldsymbol{r}_w \tag{2.4}$$

と表される. ここで

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)_{vw} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} \boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} \boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} \boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{r}_v &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)_{wu} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} \boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} \boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} \boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{r}_w &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right)_{uv} = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv} \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{2.5}$$

とおいた. さらに, 3 つのベクトル $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{r}_w$ が空間の任意の点において互いに直交するとき, つまり,

$$\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\beta = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{2.6}$$

であるとき, $(u, v, w)$ は**直交曲線座標**であるという. $(u, v, w)$ が直交曲線座標のときは $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{r}_w$ を

$$\boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{r}_u/h_u, \qquad \boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{r}_v/h_v, \qquad \boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{r}_w/h_w \tag{2.7}$$

と正規化し, $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ を正規直交基底としてもちいるのが便利である. ここで, **スケール因子** $h_u$, $h_v$, $h_w$ を $h_u = |\boldsymbol{r}_u|$, $h_v = |\boldsymbol{r}_v|$, $h_w = |\boldsymbol{r}_w|$ と定義した. つまり,

$$\begin{aligned}
h_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw}^2} \\
h_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu}^2} \\
h_w &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv}^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

である. (2.7) をもちいると, 線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_u \mathrm{d}u\,\boldsymbol{e}_u + h_v \mathrm{d}v\,\boldsymbol{e}_v + h_w \mathrm{d}w\,\boldsymbol{e}_w \tag{2.9}$$

と表される．なお, 以降では直交座標 $(x, y, z)$ も直交曲線座標の特別な場合とみなし, $u = x$, $v = y$, $w = z$, $h_x = 1$, $h_y = 1$, $h_z = 1$ と考えることにする．

## 直交座標と直交曲線座標の間の基底変換

(2.5) と (2.7) から $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ は $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ によって

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_u &= \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw}\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw}\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_v &= \frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu}\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu}\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_w &= \frac{1}{h_w}\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{h_w}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv}\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{h_w}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{2.10}$$

と表される．これを

$$[\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\,P \tag{2.11}$$

と書けば, $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ から $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ への基底変換を表す基底変換行列 $P$ は

$$P = \begin{bmatrix}
\dfrac{1}{h_u}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)_{vw} & \dfrac{1}{h_v}\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)_{wu} & \dfrac{1}{h_w}\left(\dfrac{\partial x}{\partial w}\right)_{uv} \\
\dfrac{1}{h_u}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)_{vw} & \dfrac{1}{h_v}\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)_{wu} & \dfrac{1}{h_w}\left(\dfrac{\partial y}{\partial w}\right)_{uv} \\
\dfrac{1}{h_u}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)_{vw} & \dfrac{1}{h_v}\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)_{wu} & \dfrac{1}{h_w}\left(\dfrac{\partial z}{\partial w}\right)_{uv}
\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

であることがわかる．このとき, $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ はともに正規直交基底であるから, $P$ は直交行列であることに注意しよう．逆に, $u$, $v$, $w$ を $x$, $y$, $z$ の関数とみて

$$u = u(x, y, z), \qquad v = v(x, y, z), \qquad w = w(x, y, z) \tag{2.13}$$

と考えると, $u$, $v$, $w$ の全微分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{yz}\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{zx}\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{xy}\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}v &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{yz}\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{zx}\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{xy}\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}w &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{yz}\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{zx}\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{xy}\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{2.14}$$

となる．これを線素ベクトルの表式 (2.9) にもちい，さらに，(2.1) とくらべることによって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x &= h_u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{yz}\boldsymbol{e}_u + h_v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{yz}\boldsymbol{e}_v + h_w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{yz}\boldsymbol{e}_w \\
\boldsymbol{e}_y &= h_u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{zx}\boldsymbol{e}_u + h_v\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{zx}\boldsymbol{e}_v + h_w\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{zx}\boldsymbol{e}_w \\
\boldsymbol{e}_z &= h_u\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{xy}\boldsymbol{e}_u + h_v\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{xy}\boldsymbol{e}_v + h_w\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{xy}\boldsymbol{e}_w
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

であることがわかる．ここで，(2.11) を逆に解いて

$$
[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z] = [\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w]\,P^{-1} \tag{2.16}
$$

と書けることに注意すると，

$$
P^{-1} = \begin{bmatrix}
h_u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{yz} & h_u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{zx} & h_u\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{xy} \\
h_v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{yz} & h_v\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{zx} & h_v\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{xy} \\
h_w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{yz} & h_w\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{zx} & h_w\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{xy}
\end{bmatrix} \tag{2.17}
$$

であることがわかる．ただし，この式によって $P^{-1}$ を直接計算するよりも，まず (2.12) をもちいて $P$ を求め，次に $P$ が直交行列であることから $P^{-1} = {}^tP$ の関係によって逆行列 $P^{-1}$ を求めるほうが容易であることが多い．最後に，ヤコビ行列と基底変換行列 $P$ およびその逆行列 $P^{-1}$ との関係について述べておく．ヤコビ行列の定義 (1.15) から

$$
P = \frac{\partial[x,y,z]}{\partial[u,v,w]}\begin{bmatrix} 1/h_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_w \end{bmatrix} \tag{2.18}
$$

および

$$
P^{-1} = \begin{bmatrix} h_u & 0 & 0 \\ 0 & h_v & 0 \\ 0 & 0 & h_w \end{bmatrix}\frac{\partial[u,v,w]}{\partial[x,y,z]} \tag{2.19}
$$

と表される．ここで, ヤコビ行列の性質 (1.18) を考慮すると確かに $P$ と $P^{-1}$ は互いの逆行列であることがわかる．また, (1.16) に注意すると

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw}\frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu}\frac{1}{h_w}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv}\right]\\&\qquad=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy}\right]P\end{aligned}\tag{2.20}$$

および

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy}\right]\\&=\left[\frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw}\frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu}\frac{1}{h_w}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv}\right]P^{-1}\end{aligned}\tag{2.21}$$

と書けることがわかる.

## 直交曲線座標の間の基底変換

直交曲線座標 $(u, v, w)$ がもう 1 組の直交曲線座標 $(r, s, t)$ によって

$$u = u(r, s, t), \qquad v = v(r, s, t), \qquad w = w(r, s, t) \tag{2.22}$$

と表されるとする．このとき,

$$[\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\frac{\partial[x, y, z]}{\partial[u, v, w]}\begin{bmatrix}1/h_u & 0 & 0\\ 0 & 1/h_v & 0\\ 0 & 0 & 1/h_w\end{bmatrix} \tag{2.23}$$

および

$$[\boldsymbol{e}_r\ \boldsymbol{e}_s\ \boldsymbol{e}_t] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\frac{\partial[x, y, z]}{\partial[r, s, t]}\begin{bmatrix}1/h_r & 0 & 0\\ 0 & 1/h_s & 0\\ 0 & 0 & 1/h_t\end{bmatrix} \tag{2.24}$$

であるから, $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ から $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_s$, $\boldsymbol{e}_t$ への基底変換は基底変換行列

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} h_u & 0 & 0 \\ 0 & h_v & 0 \\ 0 & 0 & h_w \end{bmatrix} \frac{\partial[u,v,w]}{\partial[r,s,t]} \begin{bmatrix} 1/h_r & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_s & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{h_u}{h_r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)_{st} & \dfrac{h_u}{h_s}\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)_{tr} & \dfrac{h_u}{h_t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{rs} \\ \dfrac{h_v}{h_r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)_{st} & \dfrac{h_v}{h_s}\left(\dfrac{\partial v}{\partial s}\right)_{tr} & \dfrac{h_v}{h_t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{rs} \\ \dfrac{h_w}{h_r}\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)_{st} & \dfrac{h_w}{h_s}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}\right)_{tr} & \dfrac{h_w}{h_t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{rs} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.25}$$

をもちいて

$$[\boldsymbol{e}_r\ \boldsymbol{e}_s\ \boldsymbol{e}_t] = [\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w]\,P \tag{2.26}$$

と表せる．また, ${}^tPP = I$ であるからスケール因子 $h_r$, $h_s$, $h_t$ は

$$\begin{aligned} h_r &= \sqrt{h_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{st}^2 + h_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{st}^2 + h_w^2\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{st}^2} \\ h_s &= \sqrt{h_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{tr}^2 + h_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{tr}^2 + h_w^2\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_{tr}^2} \\ h_t &= \sqrt{h_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{rs}^2 + h_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{rs}^2 + h_w^2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{rs}^2} \end{aligned} \tag{2.27}$$

によって与えられる．

## 直交曲線座標における基底ベクトルの微分

直交曲線座標 $(u, v, w)$ における基底ベクトル $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ の座標変数 $\alpha(= u,\ v,\ w)$ による微分について

$$\partial_\alpha\,[\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w] = [\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w]\,\mathit{\Gamma}_\alpha \tag{2.28}$$

が成り立つ．ここで,

$$
\Gamma_u = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{h_v}\left(\dfrac{\partial h_u}{\partial v}\right)_{wu} & \dfrac{1}{h_w}\left(\dfrac{\partial h_u}{\partial w}\right)_{uv} \\ -\dfrac{1}{h_v}\left(\dfrac{\partial h_u}{\partial v}\right)_{wu} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{h_w}\left(\dfrac{\partial h_u}{\partial w}\right)_{uv} & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Gamma_v = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{h_u}\left(\dfrac{\partial h_v}{\partial u}\right)_{vw} & 0 \\ \dfrac{1}{h_u}\left(\dfrac{\partial h_v}{\partial u}\right)_{vw} & 0 & \dfrac{1}{h_w}\left(\dfrac{\partial h_v}{\partial w}\right)_{uv} \\ 0 & -\dfrac{1}{h_w}\left(\dfrac{\partial h_v}{\partial w}\right)_{uv} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}
$$

$$
\Gamma_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{h_u}\left(\dfrac{\partial h_w}{\partial u}\right)_{vw} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{h_v}\left(\dfrac{\partial h_w}{\partial v}\right)_{wu} \\ \dfrac{1}{h_u}\left(\dfrac{\partial h_w}{\partial u}\right)_{vw} & \dfrac{1}{h_v}\left(\dfrac{\partial h_w}{\partial v}\right)_{wu} & 0 \end{bmatrix}
$$

である．(2.28), (2.29) は次のように導かれる．はじめに, (2.5) で定義した $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{r}_w$ の間の内積が

$$
\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\beta = h_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \tag{2.30}
$$

を満たすことをもちいて $\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\beta$ を求める．(2.30) を $\gamma$ で微分すると

$$
\partial_\gamma \left(\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\beta\right) = \boldsymbol{r}_\beta \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\beta = 2h_\alpha \partial_\gamma h_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{2.31}
$$

となる．したがって, $\alpha = \beta$ のとき

$$
\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\alpha = h_\alpha \partial_\gamma h_\alpha \tag{2.32}
$$

である． また, $\alpha \neq \beta$ のときは $\gamma = \alpha$ または $\gamma = \beta$ の場合と $\gamma \neq \alpha$ かつ $\gamma \neq \beta$ の場合に分けて考える． まず, $\gamma = \alpha \neq \beta$ として考えよう． $\partial_\alpha \boldsymbol{r}_\beta = \partial_\beta \boldsymbol{r}_\alpha$ であるから

$$
\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\beta \boldsymbol{r}_\alpha = h_\alpha \partial_\beta h_\alpha \tag{2.33}
$$

となる．一方, (2.31) より

$$\boldsymbol{r}_\beta \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\beta = 0 \tag{2.34}$$

であるから

$$\boldsymbol{r}_\beta \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha = -\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\beta = -h_\alpha \partial_\beta h_\alpha \tag{2.35}$$

となる．次に, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ として考えよう．このとき,

$$\boldsymbol{r}_\beta \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\alpha + \boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\beta = 0 \tag{2.36}$$

であるから, $\partial_\alpha \boldsymbol{r}_\beta = \partial_\beta \boldsymbol{r}_\alpha$ を考慮すると,

$$\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\beta = -\boldsymbol{r}_\beta \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\alpha = -\boldsymbol{r}_\beta \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\gamma = \boldsymbol{r}_\gamma \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\beta \tag{2.37}$$

である．一方,

$$\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\beta \boldsymbol{r}_\gamma = -\boldsymbol{r}_\gamma \cdot \partial_\beta \boldsymbol{r}_\alpha = -\boldsymbol{r}_\gamma \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_\beta \tag{2.38}$$

であるから, 実は

$$\boldsymbol{r}_\alpha \cdot \partial_\gamma \boldsymbol{r}_\beta = 0 \tag{2.39}$$

であることがわかる．このようにして得られた (2.32), (2.33), (2.35), (2.39) をもちいると, 基底ベクトルの微分 (2.28), (2.29) は次のように求められる．まず, $\partial_\alpha [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z] = 0$ であることに注意して基底変換を表す式

$$[\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\, P \tag{2.40}$$

の両辺を $\alpha$ で微分すると

$$\partial_\alpha [\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\ \partial_\alpha P = [\boldsymbol{e}_u\ \boldsymbol{e}_v\ \boldsymbol{e}_w]\, P^{-1}\, \partial_\alpha P \tag{2.41}$$

となる．したがって, $P^{-1} = {}^tP$ であることから (2.28) における行列 $\mathit{\Gamma}_\alpha$ は

$$\mathit{\Gamma}_\alpha = {}^tP\, \partial_\alpha P \tag{2.42}$$

によって与えられることがわかる．ここで, ${}^tPP = I$ を $\alpha$ で微分すると

$$\left(\partial_\alpha {}^tP\right) P + {}^tP \partial_\alpha P = {}^t\mathit{\Gamma}_\alpha + \mathit{\Gamma}_\alpha = 0 \tag{2.43}$$

となるから, ${}^t\Gamma_\alpha = -\Gamma_\alpha$, つまり, $\Gamma_\alpha$ は交代行列であることがわかる．さらに, $\partial[x,y,z]/\partial[u,v,w] = [\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_w]$ と書けることに注意すると, $\Gamma_\alpha$ は

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha &= {}^tP\,\partial_\alpha P \\
&= \begin{bmatrix} 1/h_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{r}_u \\ {}^t\boldsymbol{r}_v \\ {}^t\boldsymbol{r}_w \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad \partial_\alpha \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/h_u & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_v & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_w \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{r}_u \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_u}{h_u h_u} & \dfrac{\boldsymbol{r}_u \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_v}{h_u h_v} & \dfrac{\boldsymbol{r}_u \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_w}{h_u h_w} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_v \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_u}{h_v h_u} & \dfrac{\boldsymbol{r}_v \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_v}{h_v h_v} & \dfrac{\boldsymbol{r}_v \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_w}{h_v h_w} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_w \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_u}{h_w h_u} & \dfrac{\boldsymbol{r}_w \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_v}{h_w h_v} & \dfrac{\boldsymbol{r}_w \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_w}{h_w h_w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial_\alpha h_u}{h_u} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial_\alpha h_v}{h_v} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial_\alpha h_w}{h_w} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\boldsymbol{r}_u \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_v}{h_u h_v} & \dfrac{\boldsymbol{r}_u \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_w}{h_u h_w} \\ -\dfrac{\boldsymbol{r}_u \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_v}{h_u h_v} & 0 & \dfrac{\boldsymbol{r}_v \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_w}{h_v h_w} \\ -\dfrac{\boldsymbol{r}_u \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_w}{h_u h_w} & -\dfrac{\boldsymbol{r}_v \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{r}_w}{h_v h_w} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

と求められる．(2.44) を (2.33), (2.35), (2.39) をもちいて具体的に計算すると行列 (2.29) が得られる．

## 2.3　球座標と円柱座標

### 球座標

球座標 $(r, \theta, \varphi)$ は

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta \tag{2.45}$$

によって定義される．ここで, $r$ は $\boldsymbol{r}$ の長さ, $\theta$ は $\boldsymbol{r}$ と $z$ 軸のなす角, $\varphi$ は $\boldsymbol{r}$ を $xy$ 平面に射影したベクトルと $x$ 軸のなす角である．(2.5) によって計

算すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{r}_\theta &= r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y - r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{r}_\varphi &= -r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

となる．3 つのベクトル $\boldsymbol{r}_r$, $\boldsymbol{r}_\theta$, $\boldsymbol{r}_\varphi$ は互いに直交するから, 球座標は直交曲線座標である．そこで, (2.8) によってスケール因子 $h_r = |\boldsymbol{r}_r|$, $h_\theta = |\boldsymbol{r}_\theta|$, $h_\varphi = |\boldsymbol{r}_\varphi|$ を求めると

$$
h_r = 1, \qquad h_\theta = r, \qquad h_\varphi = r\sin\theta \tag{2.47}
$$

となるから, 線素ベクトルは球座標をもちいると

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.48}
$$

と表されることがわかる．ここで, $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}_r/h_r$, $\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{r}_\theta/h_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{r}_\varphi/h_\varphi$ は正規直交基底であり,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

と表される．さらに, (2.11) によると $[\boldsymbol{e}_r\ \boldsymbol{e}_\theta\ \boldsymbol{e}_\varphi] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\,P$ であるから, 基底変換行列 $P$ は

$$
P = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{2.50}
$$

と求められる．これは, (2.12) によって求めることもできる．一方, $P$ の逆行列は直交行列の性質 $P^{-1} = {}^tP$ から

$$
P^{-1} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \tag{2.51}
$$

と求められる．したがって, (2.16) によると $[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z] = [\boldsymbol{e}_r\ \boldsymbol{e}_\theta\ \boldsymbol{e}_\varphi]\,P^{-1}$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x &= \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\
\boldsymbol{e}_y &= \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\
\boldsymbol{e}_z &= \cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

と表される．また, (2.20) から

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} &= \sin\theta\cos\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + \sin\theta\sin\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} + \cos\theta\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} &= r\cos\theta\cos\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + r\cos\theta\sin\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} - r\sin\theta\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} &= -r\sin\theta\sin\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + r\sin\theta\cos\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx}
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

であり, 同様に, (2.21) から

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} &= \sin\theta\cos\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\ \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\ \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} &= \sin\theta\sin\varphi\ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\ \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} &= \cos\theta\ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} - \frac{\sin\theta}{r}\ \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

であることがわかる．最後に, 球座標における基底ベクトルの微分について述べよう．(2.44) をもちいて計算すると, $\partial_\alpha\left[\boldsymbol{e}_r\ \boldsymbol{e}_\theta\ \boldsymbol{e}_\varphi\right] = \left[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z\right] \mathit{\Gamma}_\alpha$ における行列 $\mathit{\Gamma}_\alpha$ は

$$
\mathit{\Gamma}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathit{\Gamma}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathit{\Gamma}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & -\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}
\tag{2.55}
$$

と求められる．

## 円柱座標

円柱座標 $(\rho, \varphi, z)$ は

$$
x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z \tag{2.56}
$$

によって定義される．ここで, $\rho$ は $\boldsymbol{r}$ を $xy$ 平面に射影したベクトルの長

さ, $\varphi$ はこのベクトルと $x$ 軸のなす角である. (2.5) によって計算すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_\rho &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{r}_\varphi &= -\rho\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \rho\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{r}_z &= \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{2.57}$$

となる. 3 つのベクトル $\boldsymbol{r}_\rho$, $\boldsymbol{r}_\varphi$, $\boldsymbol{r}_z$ は互いに直交するから, 円柱座標は直交曲線座標である. そこで, (2.8) によってスケール因子 $h_\rho = |\boldsymbol{r}_\rho|$, $h_\varphi = |\boldsymbol{r}_\varphi|$, $h_z = |\boldsymbol{r}_z|$ を求めると

$$h_\rho = 1, \qquad h_\varphi = \rho, \qquad h_z = 1 \tag{2.58}$$

となるから, 線素ベクトルは円柱座標をもちいると

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z \tag{2.59}$$

と表されることがわかる. ここで, $\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{r}_\rho/h_\rho$, $\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{r}_\varphi/h_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{r}_z/h_z$ は正規直交基底であり,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\rho &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{2.60}$$

と表される. さらに, (2.11) によると $[\boldsymbol{e}_\rho\ \boldsymbol{e}_\varphi\ \boldsymbol{e}_z] = [\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z]\,P$ であるから, 基底変換行列 $P$ は

$$P = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

と求められる. これは, (2.12) によって求めることもできる. 一方, $P$ の逆行列は直交行列の性質 $P^{-1} = {}^tP$ から

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

と求められる. したがって, (2.16) によると $[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z] = [\boldsymbol{e}_\rho\ \boldsymbol{e}_\varphi\ \boldsymbol{e}_z]\,P^{-1}$ であるから,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\
\boldsymbol{e}_y &= \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \\
\boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{2.63}$$

と表される. また, (2.20) から

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi z} &= \cos\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + \sin\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{z\rho} &= -\rho\sin\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} + \rho\cos\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho\varphi} &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy}
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

であり, 同様に, (2.21) から

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} &= \cos\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi z} - \frac{\sin\varphi}{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{z\rho} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} &= \sin\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi z} + \frac{\cos\varphi}{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{z\rho} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho\varphi}
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

であることがわかる. 最後に, 円柱座標における基底ベクトルの微分について述べよう. (2.44) をもちいて計算すると, $\partial_\alpha \left[\boldsymbol{e}_\rho\ \boldsymbol{e}_\varphi\ \boldsymbol{e}_z\right] = \left[\boldsymbol{e}_x\ \boldsymbol{e}_y\ \boldsymbol{e}_z\right] \mathit{\Gamma}_\alpha$ における行列 $\mathit{\Gamma}_\alpha$ は

$$
\mathit{\Gamma}_\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathit{\Gamma}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathit{\Gamma}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{2.66}
$$

と求められる.

# 第3章　場の積分

## 3.1　線積分

### 曲線のパラメータ表示

曲線 $\mathit{\Gamma}$ がパラメータ $p$ によって

$$u = u(p), \qquad v = v(p), \qquad w = w(p) \tag{3.1}$$

と表示されているとする．ここで, $(u, v, w)$ は曲線 $\mathit{\Gamma}$ 上の点 $\boldsymbol{r}$ を表す直交曲線座標である．このとき,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}p} = h_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\,\boldsymbol{e}_u + h_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}\,\boldsymbol{e}_v + h_w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p}\,\boldsymbol{e}_w \tag{3.2}$$

を曲線 $\mathit{\Gamma}$ 上の点 $\boldsymbol{r}$ における**接線ベクトル**という．特に, $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}p$ となるようなパラメータを**弧長パラーメータ**とよび, 通常これを $s$ で表す．また, 弧長パラメータ $s$ の微分 $\mathrm{d}s$ を**線素**という．線素は

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(h_u \mathrm{d}u)^2 + (h_v \mathrm{d}v)^2 + (h_w \mathrm{d}w)^2} \tag{3.3}$$

と書ける．曲線が弧長パラメータ $s$ によって表示されているとき, その接線ベクトル (3.2) の長さは 1 となる．これを $\boldsymbol{t}$ によって表すことにする．つまり,

$$\boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{3.4}$$

は曲線 $\mathit{\Gamma}$ の**単位接線ベクトル**である．逆に, 曲線 $\mathit{\Gamma}$ に沿う線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ はこの曲線の単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ と線素 $\mathrm{d}s$ によって

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s \tag{3.5}$$

と書ける．

### 線積分

スカラー場 $f$ の曲線 $\mathit{\Gamma}$ に沿う線積分を

$$\int_{\mathit{\Gamma}} f\,\mathrm{d}s \tag{3.6}$$

と定義する．$s$ を1つ定めると，$(u, v, w)$，つまり，曲線 $\mathit{\Gamma}$ 上の点 $\boldsymbol{r}$ が定まる．したがって，$s$ を決めるとスカラー場 $f$ の値が決まるから，(3.6) による積分が定まることになる．また，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲線 $\mathit{\Gamma}$ に沿う線積分を

$$\int_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.7}$$

と定義する．これは (3.5) をもちいれば

$$\int_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s \tag{3.8}$$

とも書ける．特に，$\mathit{\Gamma}$ が閉曲線の場合，(3.7) あるいは (3.8) を $\boldsymbol{A}$ の $\mathit{\Gamma}$ に沿う**循環**という．$s$ を1つ定めると，$(u, v, w)$，つまり，曲線 $\mathit{\Gamma}$ 上の点 $\boldsymbol{r}$ が定まる．したがって，$s$ を決めるとベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の成分 $A_u$, $A_v$, $A_w$ の値が決まるから，(3.7) による積分が定まることになる．一般のパラメータ $p$ を用いれば

$$\int_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathit{\Gamma}} \left( A_u h_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p} + A_v h_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} + A_w h_w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} \right) \mathrm{d}p \tag{3.9}$$

と書ける．なお，曲線 $\mathit{\Gamma}$ として $v$, $w$ が一定の曲線，つまり，$u$ 曲線を扱う場合には，パラメータ $p$ として $u$ そのものを採用すると便利である．このとき，

$$\int_{\mathit{\Gamma}} f\,\mathrm{d}s = \int_{\mathit{\Gamma}} f h_u\,\mathrm{d}u \tag{3.10}$$

であり，また，

$$\int_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathit{\Gamma}} A_u h_u\,\mathrm{d}u \tag{3.11}$$

である．

## 3.2　面積分

### 曲面のパラメータ表示

曲面 $\Sigma$ がパラメータ $p$, $q$ によって

$$u = u(p, q), \qquad v = v(p, q), \qquad w = w(p, q) \tag{3.12}$$

と表示されているとする．ここで, $(u, v, w)$ は曲面 $\Sigma$ 上の点 $\boldsymbol{r}$ を表す直交曲線座標である．いま, この曲面上において $q$ を一定として得られる曲線を $p$ 曲線, また, $p$ を一定として得られる曲線を $q$ 曲線とよぶことにする．これら $p$ 曲線, $q$ 曲線に沿う線素ベクトルを, それぞれ, $(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_q$, $(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_p$ と書くと,

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_q &= h_u(\mathrm{d}u)_q\,\boldsymbol{e}_u + h_v(\mathrm{d}v)_q\,\boldsymbol{e}_v + h_w(\mathrm{d}w)_q\,\boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{r}_p(\mathrm{d}p)_q \\ (\mathrm{d}\boldsymbol{r})_p &= h_u(\mathrm{d}u)_p\,\boldsymbol{e}_u + h_v(\mathrm{d}v)_p\,\boldsymbol{e}_v + h_w(\mathrm{d}w)_p\,\boldsymbol{e}_w = \boldsymbol{r}_q(\mathrm{d}q)_p\end{aligned} \tag{3.13}$$

である．ここで,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_p &= h_u\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_q\,\boldsymbol{e}_u + h_v\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_q\,\boldsymbol{e}_v + h_w\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_q\,\boldsymbol{e}_w \\ \boldsymbol{r}_q &= h_u\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)_p\,\boldsymbol{e}_u + h_v\left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)_p\,\boldsymbol{e}_v + h_w\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)_p\,\boldsymbol{e}_w\end{aligned} \tag{3.14}$$

とおいた．なお, パラメータ $p$, $q$ の選び方によっては必ずしも $p$ 曲線と $q$ 曲線は互いに直交しない, つまり, 一般には $\boldsymbol{r}_p \cdot \boldsymbol{r}_q \neq 0$ であることに注意する必要がある．$(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_q$, $(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_p$ をもちいると曲面 $\Sigma$ の**面素ベクトル** $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\mathrm{d}\boldsymbol{r})_q \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r})_p = \boldsymbol{r}_p \times \boldsymbol{r}_q\;(\mathrm{d}p)_q(\mathrm{d}q)_p \tag{3.15}$$

と定義される．ただし, この定義では**法線ベクトル** $\boldsymbol{r}_p \times \boldsymbol{r}_q$ が向いている面を曲面の表として選んだことになる．面素ベクトルをより詳しく書けば

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left\{h_v h_w \frac{\partial(v, w)}{\partial(p, q)}\,\boldsymbol{e}_u + h_w h_u \frac{\partial(w, u)}{\partial(p, q)}\,\boldsymbol{e}_v + h_u h_v \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)}\,\boldsymbol{e}_w\right\}(\mathrm{d}p)_q(\mathrm{d}q)_p \tag{3.16}$$

となる．ここで, ヤコビアン

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_q & \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial q}\right)_p \\ \left(\dfrac{\partial \beta}{\partial p}\right)_q & \left(\dfrac{\partial \beta}{\partial q}\right)_p \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

をもちいた．また, 面素ベクトルの大きさ $\mathrm{d}S$ を**面素**といい,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= |\boldsymbol{r}_p \times \boldsymbol{r}_q|\ (\mathrm{d}p)_q(\mathrm{d}q)_p \\ &= \sqrt{\left\{h_v h_w \frac{\partial(v,w)}{\partial(p,q)}\right\}^2 + \left\{h_w h_u \frac{\partial(w,u)}{\partial(p,q)}\right\}^2 + \left\{h_u h_v \frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right\}^2}(\mathrm{d}p)_q(\mathrm{d}q)_p\end{aligned} \tag{3.18}$$

である．$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ と同じ向きの**単位法線ベクトル**

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_p \times \boldsymbol{r}_q}{|\boldsymbol{r}_p \times \boldsymbol{r}_q|} \tag{3.19}$$

をもちいると

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \tag{3.20}$$

と書ける．実際の計算では曲面 $\Sigma$ として $u$ が一定の曲面, つまり, $vw$ 曲面を扱うことが多い．このときは, $p$ として $v$ を, また, $q$ として $w$ を採用することにすると, 面素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = h_v h_w (\mathrm{d}v)_w (\mathrm{d}w)_v\ \boldsymbol{e}_u \tag{3.21}$$

となり, また, 面素は

$$\mathrm{d}S = h_v h_w (\mathrm{d}v)_w (\mathrm{d}w)_v \tag{3.22}$$

となることがわかる．後に曲面の境界に沿う線積分が必要となるので, 最後に曲面の向きとその境界の向きに関する約束について述べておこう．曲面 $\Sigma$ の**境界**を $\partial\Sigma$ とするとき, $\partial\Sigma$ の向きは $\Sigma$ の表を左側にみて進む向きと約束する．言葉を換えていえば, $\partial\Sigma$ の向きに右ネジを回すとネジが $\Sigma$ の表向きに進むように約束したことになる．

## 面積分

スカラー場 $f$ の曲面 $\Sigma$ 上での面積分を

$$\iint_\Sigma f\,\mathrm{d}S \tag{3.23}$$

と定義する．また, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲面 $\Sigma$ 上での面積分を

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.24}$$

と定義する．パラメータ $p$, $q$ を用いれば

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \iint_{\Sigma} \left\{ A_u h_v h_w \frac{\partial(v,w)}{\partial(p,q)} + A_v h_w h_v \frac{\partial(w,v)}{\partial(p,q)} + A_w h_u h_v \frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)} \right\} \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

と書ける．ただし，慣例に従って $(\mathrm{d}p)_q$, $(\mathrm{d}q)_p$ を，それぞれ，$\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$ と記した．$p$, $q$ を 1 組定めると，$(u,v,w)$，つまり，曲面 $\Sigma$ 上の点 $\boldsymbol{r}$ が定まる．したがって，$p$, $q$ を決めるとベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の成分 $A_u$, $A_v$, $A_w$ の値が決まるから，(3.25) による積分が定まることになる．なお，曲面 $\Sigma$ として $vw$ 曲面を扱う場合には，$p$ として $v$ を，また，$q$ として $w$ を採用すると便利である．このとき，

$$
\iint_{\Sigma} f \, \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f \, h_v h_w \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \tag{3.26}
$$

であり，また，

$$
\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} A_u h_v h_w \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \tag{3.27}
$$

である．

## 3.3　体積分

直交曲線座標 $(u,v,w)$ における**体積要素** $\mathrm{d}V$ は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= (\mathrm{d}\boldsymbol{r})_{vw} \cdot \{(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_{wu} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r})_{uv}\} \\
&= h_u h_v h_w \, (\mathrm{d}u)_{vw} (\mathrm{d}v)_{wu} (\mathrm{d}w)_{uv}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

によって与えられる．ここで，座標変数 $\alpha$, $\beta$ を一定としたもとでの微小変位を $(\mathrm{d}\boldsymbol{r})_{\alpha\beta}$ で表した．スカラー場 $f$ の領域 $\Omega$ での体積分は体積要素 (3.28) をもちいて

$$
\iiint_{\Omega} f \, \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f h_u h_v h_w \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \tag{3.29}
$$

と定義される．ただし，慣例に従って $(\mathrm{d}u)_{vw}$, $(\mathrm{d}v)_{wu}$, $(\mathrm{d}w)_{uv}$ を，それぞれ，$\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}w$ と記した．

# 第4章　場の微分

## 4.1　勾配

### 定義

スカラー場 $f$ の**勾配** $\nabla f$ は

$$\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}f \tag{4.1}$$

を満たすベクトル場として定義される．ここで, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は任意の微小変位である．$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s$ をもちいると

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} \tag{4.2}$$

と書ける．(4.2) を $f$ の $\boldsymbol{t}$ 方向についての**方向微分係数**という．したがって, $\nabla f$ はその方向が $f$ の方向微分係数の最大値を与える方向に一致し, その大きさが方向微分係数の最大値に等しいようなベクトル場であることがわかる．また, $f$ の等位面に接する方向については $\mathrm{d}f/\mathrm{d}s = 0$ であるから, $\nabla f$ は $f$ の等位面に直交していることがわかる．次に, $\nabla f$ の線積分について考えてみよう．$\nabla f$ を点 $\boldsymbol{r}_a$ から点 $\boldsymbol{r}_b$ まで線積分すると

$$\int_{\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_b} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_b} \mathrm{d}f = f(\boldsymbol{r}_b) - f(\boldsymbol{r}_a) \tag{4.3}$$

となる．つまり, $\nabla f$ の線積分は積分経路の始点と終点における $f$ の値の差のみで決まり, 途中の道すじにはよらないことがわかる．特に, 積分経路が閉曲線のとき $\nabla f$ の線積分 (4.3) は $0$ となる．このことから, ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \nabla f$ は**保存場**とよばれる．

### 直交曲線座標における表式

直交曲線座標 $(u, v, w)$ における $\nabla f$ の表式は

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} \boldsymbol{e}_u + \frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu} \boldsymbol{e}_v + \frac{1}{h_w}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv} \boldsymbol{e}_w \tag{4.4}$$

である．(4.4) の導出はこの項目の最後で行う．この表式の $f$ として $u$, $v$, $w$ を考えると

$$\nabla u = \frac{\boldsymbol{e}_u}{h_u}, \qquad \nabla v = \frac{\boldsymbol{e}_v}{h_v}, \qquad \nabla w = \frac{\boldsymbol{e}_w}{h_w} \tag{4.5}$$

を得る．したがって, 勾配についての連鎖律

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} \nabla u + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu} \nabla v + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv} \nabla w \tag{4.6}$$

が成り立つことがわかる．また, 直交座標, 球座標, 円柱座標の場合の $\nabla f$ の表式は

$\boxed{\text{直交座標}}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} \boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{zx} \boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} \boldsymbol{e}_z \tag{4.7}$$

$\boxed{\text{球座標}}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} \boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} \boldsymbol{e}_\varphi \tag{4.8}$$

$\boxed{\text{円柱座標}}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\varphi z} \boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{z\rho} \boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho\varphi} \boldsymbol{e}_z \tag{4.9}$$

である．さて, 直交曲線座標における $\nabla f$ の表式 (4.4) を導こう．直交曲線座標 $(u, v, w)$ をもちいると

$$\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_u \mathrm{d}u \, \nabla f \cdot \boldsymbol{e}_u + h_v \mathrm{d}v \, \nabla f \cdot \boldsymbol{e}_v + h_w \mathrm{d}w \, \nabla f \cdot \boldsymbol{e}_w \tag{4.10}$$

と書ける．これを $f$ の全微分の表式

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} \mathrm{d}u + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{wu} \mathrm{d}v + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{uv} \mathrm{d}w \tag{4.11}$$

とくらべると, たとえば, $u$ について

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{e}_u = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{vw} \tag{4.12}$$

であることがわかる．したがって, $v$, $w$ についても同様に考えると, 直交曲線座標における $\nabla f$ の表式として (4.4) が得られる．

## 4.2　回転

### 定義

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の**回転** $\nabla \times \boldsymbol{A}$ は

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \int_{\partial\sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.13}$$

を満たすベクトル場として定義される．ここで, $\sigma$ は任意の微小曲面であり, $\Delta \boldsymbol{S}$ はその面素ベクトルである．$\Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\Delta S$ をもちいると

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\Delta S} \int_{\partial\sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.14}$$

と書ける．(4.14) を $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向についての**渦度**という．この式からわかるように, 渦度は与えられた方向を法線方向とする面における単位面積当たりの循環を表す量である．したがって, $\nabla \times \boldsymbol{A}$ はその方向が $\boldsymbol{A}$ の渦度の最大値を与える方向に一致し, その大きさが渦度の最大値に等しいようなベクトル場であることがわかる．また, 任意の点において $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ となるようなベクトル場は**渦なし**であるという．(4.13) による定義から明らかなように, 保存場 $\boldsymbol{A} = \nabla f$ については $\partial\sigma$ が閉曲線であるために線積分が $0$ となり, その結果, $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ であることがわかる．つまり, 保存場は渦なしであり, 任意の点において

$$\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0} \tag{4.15}$$

が成り立つ．

### 直交曲線座標における表式

直交曲線座標 $(u, v, w)$ における $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の表式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{A} = &\frac{1}{h_v h_w}\left\{\left(\frac{\partial A_w h_w}{\partial v}\right)_{wu} - \left(\frac{\partial A_v h_v}{\partial w}\right)_{uv}\right\}\boldsymbol{e}_u \\ &+ \frac{1}{h_w h_u}\left\{\left(\frac{\partial A_u h_u}{\partial w}\right)_{uv} - \left(\frac{\partial A_w h_w}{\partial u}\right)_{vw}\right\}\boldsymbol{e}_v \\ &+ \frac{1}{h_u h_v}\left\{\left(\frac{\partial A_v h_v}{\partial u}\right)_{vw} - \left(\frac{\partial A_u h_u}{\partial v}\right)_{wu}\right\}\boldsymbol{e}_w \end{aligned} \tag{4.16}$$

である．(4.16) の導出はこの項目の最後で行う．これを

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_u}{h_v h_w} & \dfrac{\boldsymbol{e}_v}{h_w h_u} & \dfrac{\boldsymbol{e}_w}{h_u h_v} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ A_u h_u & A_v h_v & A_w h_w \end{vmatrix} \tag{4.17}$$

と書くと覚えやすい．なお, この表式と勾配 $\nabla f$ の直交曲線座標における表式 (4.4) からも $\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0}$, つまり, 保存場は渦なしであることがわかる．ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が保存場であるとき, スカラー場 $f$ を

$$\begin{aligned} f(u, v, w) = &\int_{u_0}^{u} A_u h_u(u', v_0, w_0)\,\mathrm{d}u' \\ &+ \int_{v_0}^{v} A_v h_v(u, v', w_0)\,\mathrm{d}v' + \int_{w_0}^{w} A_w h_w(u, v, w')\,\mathrm{d}w' \end{aligned} \tag{4.18}$$

によって定義すると, $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A} = \nabla f$ として与えられる．また, 直交座標, 球座標, 円柱座標の場合の $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の表式は

直交座標

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{A} = &\left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)_{zx} - \left(\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)_{xy} \right\} \boldsymbol{e}_x \\ &+ \left\{ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)_{xy} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_{yz} \right\} \boldsymbol{e}_y \\ &+ \left\{ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)_{yz} - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)_{zx} \right\} \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{4.19}$$

球座標

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{A} = &\frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{ \left(\frac{\partial A_\varphi r \sin\theta}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} - \left(\frac{\partial A_\theta r}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} \right\} \boldsymbol{e}_r \\ &+ \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)_{r\theta} - \left(\frac{\partial A_\varphi r \sin\theta}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} \right\} \boldsymbol{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial A_\theta r}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} - \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)_{\varphi r} \right\} \boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned} \tag{4.20}$$

$\boxed{\text{円柱座標}}$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}=&\frac{1}{\rho}\left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\right)_{z\rho}-\left(\frac{\partial A_\varphi\rho}{\partial z}\right)_{\rho\varphi}\right\}\boldsymbol{e}_\rho\\&+\left\{\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right)_{\rho\varphi}-\left(\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)_{\varphi z}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi\\&+\frac{1}{\rho}\left\{\left(\frac{\partial A_\varphi\rho}{\partial\rho}\right)_{\varphi z}-\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)_{z\rho}\right\}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{4.21}$$

である．さて, 直交曲線座標における $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の表式 (4.16) を導こう．そのために, 定義 (4.13) の $\sigma$ として

$$\begin{aligned}\gamma_1:&\ (u_0,\ v_0,\ w_0)\to(u_0,\ v_0+\Delta v,\ w_0)\\\gamma_2:&\ (u_0,\ v_0+\Delta v,\ w_0)\to(u_0,\ v_0+\Delta v,\ w_0+\Delta w)\\\gamma_3:&\ (u_0,\ v_0+\Delta v,\ w_0+\Delta w)\to(u_0,\ v_0,\ w_0+\Delta w)\\\gamma_4:&\ (u_0,\ v_0,\ w_0+\Delta w)\to(u_0,\ v_0,\ w_0)\end{aligned}\tag{4.22}$$

を 4 つの辺とする微小曲面を考える．このとき, $\sigma$ の境界は $\partial\sigma=\gamma_1+\cdots+\gamma_4$ と表せる．まず, $\gamma_1$, $\gamma_3$ に沿う線積分をあわせて考える．このとき, $\gamma_1$ においては $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{e}_v$ であるのに対し, $\gamma_3$ においては $\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{e}_v$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\gamma_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\int_{v_0}^{v_0+\Delta v}\{a_v(u_0,v,w_0)-a_v(u_0,v,w_0+\Delta w)\}\,\mathrm{d}v\end{aligned}\tag{4.23}$$

と書ける．ここで, $a_v=A_vh_v$ とおいた．さらに, $a_v(u_0,v,w_0+\Delta w)$ を $\Delta w$ についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$a_v(u_0,v,w_0+\Delta w)=a_v(u_0,v,w_0)+\left(\frac{\partial a_v}{\partial w_0}\right)_{u_0v}\Delta w\tag{4.24}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\gamma_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=-\int_{v_0}^{v_0+\Delta v}\left(\frac{\partial a_v}{\partial w_0}\right)_{u_0v}\Delta w\,\mathrm{d}v\\&=-\left(\frac{\partial a_v}{\partial w_0}\right)_{u_0v_0}\Delta v\Delta w=-\left(\frac{\partial A_vh_v}{\partial w_0}\right)_{u_0v_0}\Delta v\Delta w\end{aligned}\tag{4.25}$$

となる．ただし, 2 番目の等式においては $\Delta v$ が微小量であることから被積分関数を $v = v_0$ における値で置き換えて積分を評価した．次に, $\gamma_2$, $\gamma_4$ に沿う線積分をあわせて考える．このとき, $\gamma_2$ においては $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_w$ であるのに対し, $\gamma_4$ においては $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{e}_w$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_4} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \left\{a_w(u_0, v_0+\Delta v, w) - a_w(u_0, v_0, w)\right\} \mathrm{d}w \end{aligned} \tag{4.26}$$

と書ける．ここで, $a_w = A_w h_w$ とおいた．さらに, $a_w(u_0, v_0+\Delta v, w)$ を $\Delta v$ についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$a_w(u_0, v_0+\Delta v, w) = a_w(u_0, v_0, w) + \left(\frac{\partial a_w}{\partial v_0}\right)_{wu_0} \Delta v \tag{4.27}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_4} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \left(\frac{\partial a_w}{\partial v_0}\right)_{wu_0} \Delta v\, \mathrm{d}w \\ &= \left(\frac{\partial a_w}{\partial v_0}\right)_{w_0u_0} \Delta v \Delta w = \left(\frac{\partial A_w h_w}{\partial v_0}\right)_{w_0u_0} \Delta v \Delta w \end{aligned} \tag{4.28}$$

となる．ただし, 2 番目の等式においては $\Delta w$ が微小量であることから被積分関数を $w = w_0$ における値で置き換えて積分を評価した．以上から, 微小曲面 $\sigma$ の境界 $\partial\sigma$ に沿う線積分は

$$\int_{\partial\sigma} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left\{\left(\frac{\partial A_w h_w}{\partial v_0}\right)_{w_0u_0} - \left(\frac{\partial A_v h_v}{\partial w_0}\right)_{u_0v_0}\right\} \Delta v \Delta w \tag{4.29}$$

と書けることがわかる．一方, この微小曲面 $\sigma$ については $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_u$, $\Delta S = h_v h_w \Delta v \Delta w$ であるから, (4.14) によって,

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_u = \frac{1}{h_v h_w}\left\{\left(\frac{\partial A_w h_w}{\partial v_0}\right)_{w_0u_0} - \left(\frac{\partial A_v h_v}{\partial w_0}\right)_{u_0v_0}\right\} \tag{4.30}$$

が得られる．したがって, $(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_v$, $(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_w$ についても同様に考え, $u_0$, $v_0$, $w_0$ をあらためて $u$, $v$, $w$ とおくと, 直交曲線座標における $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の表式として (4.16) が得られる．

## 4.3　発散

### 定義

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の**発散** $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\Delta V = \iint_{\partial\omega} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.31}$$

を満たすスカラー場として定義される．ここで, $\omega$ は体積 $\Delta V$ の任意の微小領域であり, $\partial\omega$ は $\omega$ の境界を表す．この定義を

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\Delta V} \iint_{\partial\omega} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.32}$$

と書けば明らかなように, 発散は単位体積当たりの流出を表す量であることがわかる．このため, 発散は**湧き出し**ともよばれる．また, 任意の点において $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ となるようなベクトル場は**湧き出しなし**であるという．

### 直交曲線座標における表式

直交曲線座標 $(u, v, w)$ における $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の表式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left\{ \left( \frac{\partial A_u h_v h_w}{\partial u} \right)_{vw} + \left( \frac{\partial A_v h_w h_u}{\partial v} \right)_{wu} + \left( \frac{\partial A_w h_u h_v}{\partial w} \right)_{uv} \right\} \tag{4.33}$$

である．(4.33) の導出はこの項目の最後で行う．この表式と回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の直交曲線座標における表式 (4.16) から重要な性質として

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{4.34}$$

が成り立つことがわかる．つまり, ベクトル場の回転は湧き出しなしである．また, 直交座標, 球座標, 円柱座標の場合の $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の表式は

直交座標

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_{yz} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} \right)_{zx} + \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_{xy} \tag{4.35}$$

球座標

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{ \left( \frac{\partial A_r r^2 \sin\theta}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} + \left( \frac{\partial A_\theta r \sin\theta}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \left( \frac{\partial A_\varphi r}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \right\} \tag{4.36}$$

$\boxed{\text{円柱座標}}$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left\{\left(\frac{\partial A_\rho\rho}{\partial\rho}\right)_{\varphi z}+\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{z\rho}+\left(\frac{\partial A_z\rho}{\partial z}\right)_{\rho\varphi}\right\} \tag{4.37}$$

である．さて, 直交曲線座標における $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の表式 (4.33) を導こう．そのために, 定義 (4.31) の $\omega$ として

$$\begin{array}{ll}\sigma_1:(u_0+\Delta u,\ v\ ,\ w\ ) & \sigma_2:(u_0,\ v\ ,\ w\ )\\ \sigma_3:(\ u\ ,v_0+\Delta v,\ w\ ) & \sigma_4:(\ u\ ,v_0,\ w\ )\\ \sigma_5:(\ u\ ,\ v\ ,w_0+\Delta w) & \sigma_6:(\ u\ ,\ v\ ,w_0)\end{array}$$
$$u_0\le u\le u_0+\Delta u,\ v_0\le v\le v_0+\Delta v,\ w_0\le w\le w_0+\Delta w \tag{4.38}$$

を 6 つの側面とする微小領域を考える．このとき, $\omega$ の境界は $\partial\omega=\sigma_1+\cdots+\sigma_6$ と表せる．まず, $\sigma_1$ と $\sigma_2$ の上での面積分をあわせて考える．このとき, $\sigma_1$ においては $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_u$ であるのに対し, $\sigma_2$ においては $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_u$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}&\iint_{\sigma_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\sigma_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\int_{w_0}^{w_0+\Delta w}\int_{v_0}^{v_0+\Delta v}\{a_u(u_0+\Delta u,v,w)-a_u(u_0,v,w)\}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{4.39}$$

と書ける．ここで, $a_u=A_uh_vh_w$ とおいた．さらに, $a_u(u_0+\Delta u,v,w)$ を $\Delta u$ についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$a_u(u_0+\Delta u,v,w)=a_u(u_0,v,w)+\left(\frac{\partial a_u}{\partial u_0}\right)_{vw}\Delta u \tag{4.40}$$

であるから

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\sigma_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\int_{w_0}^{w_0+\Delta w}\int_{v_0}^{v_0+\Delta v}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u_0}\right)_{vw}\Delta u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\&=\left(\frac{\partial a_u}{\partial u_0}\right)_{v_0w_0}\Delta u\Delta v\Delta w\\&=\left(\frac{\partial A_uh_vh_w}{\partial u_0}\right)_{v_0w_0}\Delta u\Delta v\Delta w\end{aligned} \tag{4.41}$$

となる．ただし, 2 番目の等式においては $\Delta v$, $\Delta w$ が微小量であることから被積分関数を $v = v_0$, $w = w_0$ における値で置き換えて積分を評価した．$\sigma_3$ と $\sigma_4$, $\sigma_5$ と $\sigma_6$ の上での面積分についても同様に考えると

$$\iint_{\partial\omega} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \left\{ \left( \frac{\partial A_u h_v h_w}{\partial u_0} \right)_{v_0 w_0} + \left( \frac{\partial A_v h_w h_u}{\partial v_0} \right)_{w_0 u_0} + \left( \frac{\partial A_w h_u h_v}{\partial w_0} \right)_{u_0 v_0} \right\} \Delta u \Delta v \Delta w \tag{4.42}$$

となる．一方, $\Delta V = h_u h_v h_w \Delta u \Delta v \Delta w$ であるから, $u_0$, $v_0$, $w_0$ をあらためて $u$, $v$, $w$ とおくと, 直交曲線座標における $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の表式として (4.33) が得られる．

## ラプラシアン

**ラプラシアン** $\nabla^2$ はスカラー場 $f$ について

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \tag{4.43}$$

によって定義される 2 階の微分演算子である．直交曲線座標 $(u, v, w)$ における $\nabla^2 f$ の表式は (4.4), (4.33) から

$$\begin{aligned}\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \Bigg\{ & \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{vw} \\ & + \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right)_{wu} + \left( \frac{\partial}{\partial w} \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right)_{uv} \Bigg\}\end{aligned} \tag{4.44}$$

となる．また, 直交座標, 球座標, 円柱座標の場合の $\nabla^2 f$ の表式は

直交座標

$$\nabla^2 f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{yz} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{zx} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{xy} \tag{4.45}$$

球座標

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right)_{r\theta} \tag{4.46}$$

円柱座標

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{\varphi z} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)_{z\rho} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{\rho\varphi} \tag{4.47}$$

である. なお, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について重要な公式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{4.48}$$

が成り立つ.

## 4.4　積の微分の公式

勾配, 回転, 発散について以下の**積の微分の公式**が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ \nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g \\
&(2)\ \ \nabla\times(f\boldsymbol{A}) = \nabla f\times\boldsymbol{A} + f\nabla\times\boldsymbol{A} \\
&(3)\ \ \nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = \nabla f\cdot\boldsymbol{A} + f\nabla\cdot\boldsymbol{A} \\
&(4)\ \ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&(5)\ \ \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&(6)\ \ \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})
\end{aligned} \tag{4.49}$$

# 第5章　積分定理

## 5.1　微分積分学の基本定理

1 変数関数 $f(x)$ の微分と積分について

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \tag{5.1}$$

が成り立つ．これを**微分積分学の基本定理**という．この定理をスカラー場, ベクトル場に拡張したものがこの章で取り上げる**積分定理**である．スカラー場 $f$ については, 前章の勾配のところですでに (4.3) として

$$\int_{\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_b} \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}_b) - f(\boldsymbol{r}_a) \tag{5.2}$$

を導いた．(5.1), (5.2) は関数の微分を積分したものが積分領域の境界におけるもとの関数の値の差として与えられるという意味をもつ．以下で扱うベクトル場についての 2 つの積分定理もこの意味をより一般的な形で表すものとなっている．

## 5.2　ストークスの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の定義

$$(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \int_{\partial\sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.3}$$

に基づいて, 隣接する 2 つの微小な 3 角形 $\sigma_1$, $\sigma_2$ に対してこれを適用してみよう．ここで, $\sigma_1$ と $\sigma_2$ は 1 つの辺 $\gamma$ を共有しており, また, $\sigma_1$ と $\sigma_2$ の面素ベクトルは同じ側を向いているとする．このとき, $\sigma_1$ と $\sigma_2$ についての和

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_1 + (\nabla \times \boldsymbol{A})_2 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_2 = \int_{\partial\sigma_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\partial\sigma_2} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.4}$$

を考えると, 右辺の線積分への共有された辺 $\gamma$ からの寄与が相殺して消えることがわかる．これは, $\partial\sigma_1$, $\partial\sigma_2$ における辺 $\gamma$ 上の接線ベクトル $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$ が互いに逆向きとなっているためである．したがって,

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_1 + (\nabla \times \boldsymbol{A})_2 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_2 = \int_{\partial(\sigma_1+\sigma_2)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.5}$$

と書けることがわかる．ここで, $\sigma_1 + \sigma_2$ は $\sigma_1$ と $\sigma_2$ をあわせた図形を表す．したがって, 与えられた曲面 $\varSigma$ を微小な 3 角形によって $\varSigma = \sum_i \sigma_i$ と分割して考えると,

$$\sum_i (\nabla \times \boldsymbol{A})_i \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i = \int_{\partial\left(\sum\limits_i \sigma_i\right)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.6}$$

が成り立つことがわかる．(5.6) を積分の形で表すと

$$\iint_{\varSigma} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial\varSigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.7}$$

となる．(5.7) を**ストークスの定理**という．ストークスの定理からわかる重要な性質は, $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の面積分は積分を行う曲面の境界さえ同じであれば異なる曲面に対してもまったく同じとなるという点である．これは, $\nabla f$ の線積分 (5.2) が積分経路の始点と終点のみで決まり, 途中の道すじによらないという性質と似ている．

## 5.3　ガウスの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の定義

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}\, \Delta V = \iint_{\partial\omega} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.8}$$

に基づいて, 隣接する 2 つの微小な 4 面体 $\omega_1$, $\omega_2$ に対してこれを適用してみよう．ここで, $\omega_1$ と $\omega_2$ は 1 つの面 $\sigma$ を共有しているとする．このとき, $\omega_1$ と $\omega_2$ についての和

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{A})_1\, \Delta V_1 + (\nabla \cdot \boldsymbol{A})_2\, \Delta V_2 = \iint_{\partial\omega_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\partial\omega_1} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.9}$$

を考えると, 右辺の面積分への共有された面 $\sigma$ からの寄与が相殺して消えることがわかる．これは, $\partial\omega_1$, $\partial\omega_2$ における面 $\sigma$ 上の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ が互いに逆向きとなっているためである．したがって,

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{A})_1\,\Delta V_1+(\nabla\cdot\boldsymbol{A})_2\,\Delta V_2=\iint_{\partial(\omega_1+\omega_2)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.10}$$

と書けることがわかる．ここで, $\omega_1+\omega_2$ は $\omega_1$ と $\omega_2$ をあわせた図形を表す．したがって, 与えられた領域 $\Omega$ を微小な 4 面体によって $\Omega=\sum_i\omega_i$ と分割して考えると,

$$\sum_i(\nabla\cdot\boldsymbol{A})_i\,\Delta V_i=\int_{\partial\left(\sum_i\omega_i\right)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.11}$$

が成り立つことがわかる．(5.11) を積分の形で表すと

$$\iiint_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.12}$$

となる．(5.12) を**ガウスの定理**という．

## 5.4　部分積分の公式

積の微分の公式と積分定理をあわせてもちいると以下の**部分積分の公式**を導くことができる．

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \int_{\boldsymbol{r}_a\to\boldsymbol{r}_b}(\nabla f)g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\big[fg\big]_{\boldsymbol{r}_a}^{\boldsymbol{r}_b}-\int_{\boldsymbol{r}_a\to\boldsymbol{r}_b}f\nabla g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&(2)\quad \iint_\Sigma(\nabla f\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{\partial\Sigma}f\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\iint_\Sigma(f\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&(3)\quad \iiint_\Omega\nabla f\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}f\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\iiint_\Omega f\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V\\
&(4)\quad \iiint_\Omega\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\iiint_\Omega\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{5.13}$$

また, 上の公式 (3) において $\boldsymbol{A}=\nabla g$ とおくことにより

$$\iiint_\Omega\nabla f\cdot\nabla g\,\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}f\nabla g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\iiint_\Omega f\nabla^2g\,\mathrm{d}V \tag{5.14}$$

が得られる．さらに，この公式およびこの公式で $f$ と $g$ を入れ替えたものから

$$\iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) \mathrm{d}V \tag{5.15}$$

が得られる．(5.14), (5.15) を**グリーンの公式**という．

# 索 引