球座標におけるベクトル解析

§1　線素ベクトル・面素ベクトル・体積要素

線素ベクトル

球座標では図 1 に示すように r, θ, φ の値を 1 組与えることによって空間の点 (r, θ, φ) を指定する．ここで, r, θ, φ の動く範囲は $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ である．このとき, θ, φ が一定の曲線, φ, r が一定の曲線, r, θ が一定の曲線をそれぞれ r 曲線, θ 曲線, φ 曲線といい, これらを総称して**座標曲線**とよぶ．また, r が一定の曲面, θ が一定の曲面, φ が一定の曲面をそれぞれ $\theta\varphi$ 曲面, φr 曲面, $r\theta$ 曲面といい, これらを総称して**座標曲面**とよぶ．与えられた r, θ, φ の値について r 曲線, θ 曲線, φ 曲線を描くと, これら 3 つの曲線は点 (r, θ, φ) で交わることになる．さらに, r 曲線, θ 曲線, φ 曲線の正の向きを向く単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ をこの点における正規直交基底として採用する．直交座標の場合と異なり, 球座標の場合には空間の各点に付随する正規直交基底 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ を他の点に付随する正規直交基底 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ に平行移動のみによって重ねることは必ずしもできないという点に注意する必要がある．このため, 球座標をもちいて場の微分を行うと計算が複雑になることがある．なお, 本来ならば点 (r, θ, φ) に付随する正規直交基底であることを明示するために $\boldsymbol{e}_r(r, \theta, \varphi)$, $\boldsymbol{e}_\theta(r, \theta, \varphi)$, $\boldsymbol{e}_\varphi(r, \theta, \varphi)$ のように表すのがより正確であるが, (r, θ, φ) を省略して単に $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ と記すことが多いので注意する必要がある．さて, 図 2 に示すように点 (r, θ, φ) における線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は点 (r, θ, φ) と点 $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$ を結ぶ微小変位であり,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_r \, \mathrm{d}r \, \boldsymbol{e}_r + h_\theta \, \mathrm{d}\theta \, \boldsymbol{e}_\theta + h_\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \boldsymbol{e}_\varphi \tag{1}$$

と表される．ここで**スケール因子** h_r, h_θ, h_φ を

$$h_r = 1, \qquad h_\theta = r, \qquad h_\varphi = r \sin\theta \tag{2}$$

と定義した．スケール因子も変数 r, θ, φ の関数であるので, 本来ならばこのことを明示するために $h_r(r, \theta, \varphi)$, $h_\theta(r, \theta, \varphi)$, $h_\varphi(r, \theta, \varphi)$ のように表すのがより正確であるが, 変数を省略して単に h_r, h_θ, h_φ と記すことが多いので注意する必要がある．

図 1　球座標.

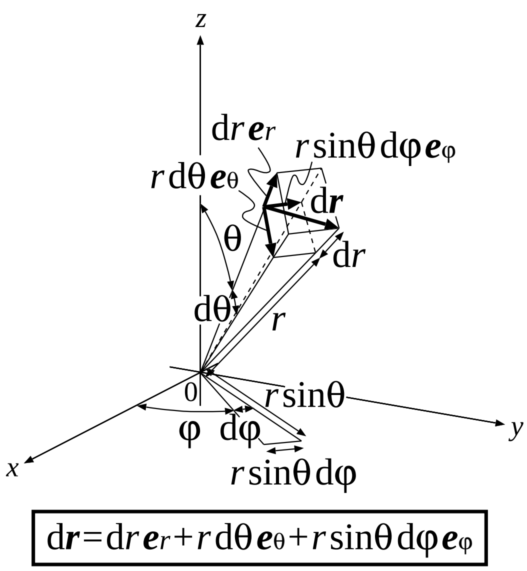


図 2　球座標における線素ベクトル.

面素ベクトル

点 (r, θ, φ) における 2 つの線素ベクトル

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 &= h_r\,\mathrm{d}r_1\ \boldsymbol{e}_r + h_\theta\,\mathrm{d}\theta_1\ \boldsymbol{e}_\theta + h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi_1\ \boldsymbol{e}_\varphi \\
\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 &= h_r\,\mathrm{d}r_2\ \boldsymbol{e}_r + h_\theta\,\mathrm{d}\theta_2\ \boldsymbol{e}_\theta + h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi_2\ \boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}
\tag{3}
$$

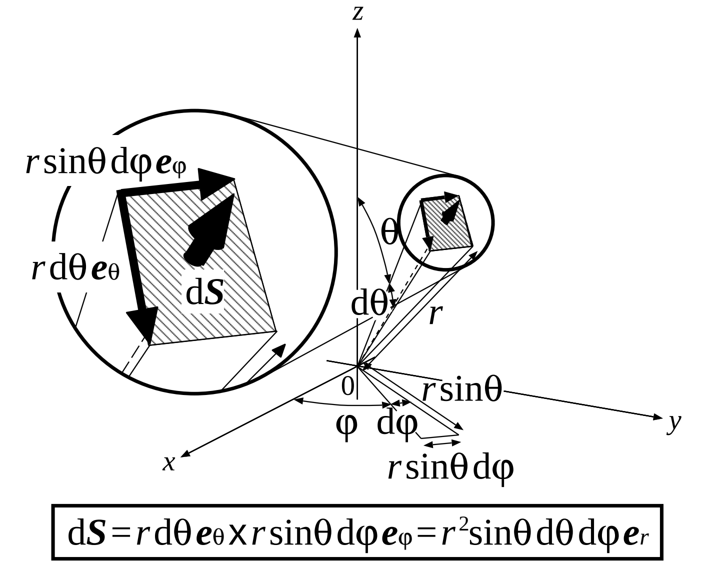


図 3　球座標における面素ベクトル ($\theta\varphi$ 曲面の場合).

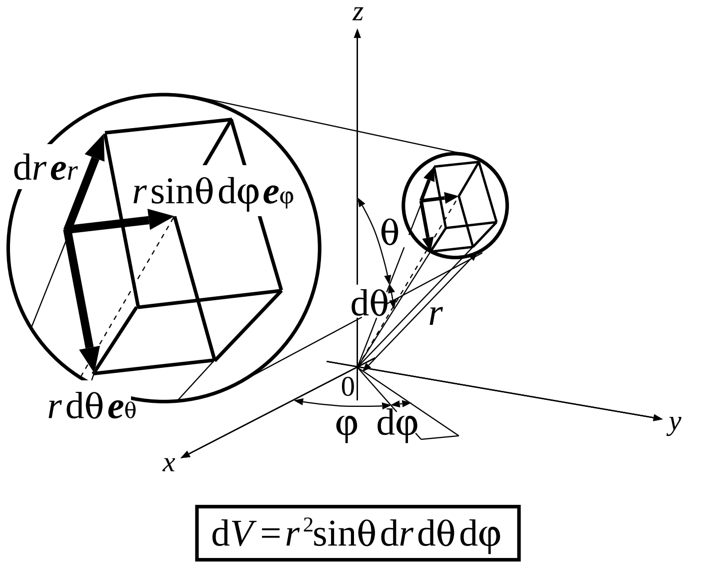


図 4　球座標における体積要素.

からつくられる面素ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \\
&= h_\theta h_\varphi \begin{vmatrix} \mathrm{d}\theta_1 & \mathrm{d}\varphi_1 \\ \mathrm{d}\theta_2 & \mathrm{d}\varphi_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_r + h_\varphi h_r \begin{vmatrix} \mathrm{d}\varphi_1 & \mathrm{d}r_1 \\ \mathrm{d}\varphi_2 & \mathrm{d}r_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_\theta + h_r h_\theta \begin{vmatrix} \mathrm{d}r_1 & \mathrm{d}\theta_1 \\ \mathrm{d}r_2 & \mathrm{d}\theta_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}
\tag{4}
$$

と表される．座標曲面の場合を考えるとこの表式は特に簡単なものとなる．ここでは $\theta\varphi$

曲面を例として取り上げ, その上の面素ベクトルについて説明する. ただし, $\theta\varphi$ 曲面の表を r 曲線の正の向きにとることにする. $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\varphi$ は正であるとして図 3 に示す 2 つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 &= h_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta = r\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 &= h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned} \tag{5}$$

を考えよう. これら 2 つの線素ベクトルから $\theta\varphi$ 曲面上の面素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = h_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta \times h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi = h_\theta h_\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_r = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_r \tag{6}$$

となることがわかる. つまり, $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ と書けば $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r$, $\mathrm{d}S = h_\theta h_\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ である. 同様に考えて, φr 曲面上の面素ベクトルは, 曲面の表を θ 曲線の正の向きにとれば,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \times h_r\,\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r = h_\varphi h_r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_\theta = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_\theta \tag{7}$$

であり, また, $r\theta$ 曲面上の面素ベクトルは, 曲面の表を φ 曲線の正の向きにとれば,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = h_r\,\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r \times h_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta = h_r h_\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{8}$$

である. ただし, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\varphi$ はすべて正であると考える.

体積要素

図 4 に示すように, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\varphi$ はすべて正であるとして点 (r, θ, φ) における 3 つの線素ベクトル

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 &= h_r\,\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 &= h_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta = r\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 &= h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \end{aligned} \tag{9}$$

を考えると, 球座標における体積要素は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_3) = h_r\,\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r \cdot (h_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta \times h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi) \\ &= h_r h_\theta h_\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

と表される.

§2　線積分・面積分・体積分

座標曲線に沿う線積分

球座標の座標曲線に沿う線積分の求め方について説明しよう．そのために, 例として r 曲線に沿う線積分を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は球座標の成分をもちいて

$$\boldsymbol{V} = V_r(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_r + V_\theta(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_\theta + V_\varphi(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{11}$$

と表されるとする．また, 積分経路として

$$\mathit{\Gamma} = \{(r,\theta,\varphi) \mid a \le r \le b,\ \theta = \theta_0,\ \varphi = \varphi_0\} \tag{12}$$

を考えよう．ただし, $\mathit{\Gamma}$ は点 (a,θ_0,φ_0) から点 (b,θ_0,φ_0) へと向きづけられているとする．$\mathit{\Gamma}$ 上では θ, φ は一定, つまり, $\mathrm{d}\theta = 0$, $\mathrm{d}\varphi = 0$ であるから, $\mathit{\Gamma}$ に沿う線素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_r\,\mathrm{d}r\ \boldsymbol{e}_r \tag{13}$$

と表される．したがって, $\mathit{\Gamma}$ 上の点 (r,θ_0,φ_0) における $\boldsymbol{V}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ の内積をとると

$$\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = V_r(r,\theta_0,\varphi_0)h_r(r,\theta_0,\varphi_0)\,\mathrm{d}r \tag{14}$$

となるから, $\mathit{\Gamma}$ に沿う $\boldsymbol{V}$ の線積分を求めるには

$$\begin{aligned}\int_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_a^b V_r(r,\theta_0,\varphi_0)h_r(r,\theta_0,\varphi_0)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_a^b V_r(r,\theta_0,\varphi_0)\,\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{15}$$

を計算すればよいことがわかる．たとえば, ベクトル場として

$$\boldsymbol{V} = r\cos\theta\cos\varphi\ \boldsymbol{e}_r + r^2\sin\theta\sin\varphi\ \boldsymbol{e}_\theta + r^3\tan\theta\tan\varphi\ \boldsymbol{e}_\varphi \tag{16}$$

を考えれば

$$\int_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b r\cos\theta_0\cos\varphi_0\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\cos\theta_0\cos\varphi_0 \tag{17}$$

となる．ここでは例として r 曲線上の積分経路に沿う線積分の求め方について説明したが, θ 曲線上の積分経路

$$\mathit{\Gamma} = \{(r,\theta,\varphi) \mid r = r_0,\ a \le \theta \le b,\ \varphi = \varphi_0\} \tag{18}$$

に沿う線積分を求めるには

$$\begin{aligned}\int_\varGamma \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_a^b V_\theta(r_0,\theta,\varphi_0)h_\theta(r_0,\theta,\varphi_0)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_a^b V_\theta(r_0,\theta,\varphi_0)r_0\,\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{19}$$

を計算すればよい．また，φ 曲線上の積分経路

$$\varGamma = \{(r,\theta,\varphi) \mid r = r_0,\ \theta = \theta_0,\ a \leq \varphi \leq b\} \tag{20}$$

に沿う線積分を求めるには

$$\begin{aligned}\int_\varGamma \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_a^b V_\varphi(r_0,\theta_0,\varphi)h_\varphi(r_0,\theta_0,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_a^b V_\varphi(r_0,\theta_0,\varphi)r_0\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{21}$$

を計算すればよい．

一般の曲線に沿う線積分

ここでは積分経路が一般の曲線上にある場合を考える．まず，曲線 $\varGamma$ を**パラメータ表示**する．つまり，パラメータ p もちいて

$$r = r(p), \qquad \theta = \theta(p), \qquad \varphi = \varphi(p) \tag{22}$$

のように $\varGamma$ 上の点 $(r(p),\theta(p),\varphi(p))$ を表す．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は球座標の成分をもちいて

$$\boldsymbol{V} = V_r(p)\boldsymbol{e}_r + V_\theta(p)\boldsymbol{e}_\theta + V_\varphi(p)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{23}$$

と表されるとする．ただし，$V_r(r(p),\theta(p),\varphi(p))$ などを簡単に $V_r(p)$ などと書いた．このとき，

$$\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p, \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p, \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p \tag{24}$$

であるから，$\varGamma$ に沿う線素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left\{h_r(p)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{e}_r + h_\theta(p)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{e}_\theta + h_\varphi(p)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{e}_\varphi\right\}\mathrm{d}p \tag{25}$$

と表される．ただし, $h_r(r(p),\theta(p),\varphi(p))$ などを簡単に $h_r(p)$ などと書いた．したがって, $\mathit{\Gamma}$ 上の点 $(r(p),\theta(p),\varphi(p))$ における $\boldsymbol{V}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ の内積をとると

$$\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\left\{V_r(p)h_r(p)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}+V_\theta(p)h_\theta(p)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}p}+V_\varphi(p)h_\varphi(p)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right\}\mathrm{d}p \tag{26}$$

となるから, $\mathit{\Gamma}$ に沿う $\boldsymbol{V}$ の線積分を求めるには

$$\begin{aligned}\int_{\mathit{\Gamma}}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_{\mathit{\Gamma}}\left\{V_r(p)h_r(p)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}+V_\theta(p)h_\theta(p)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}p}+V_\varphi(p)h_\varphi(p)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right\}\mathrm{d}p\\&=\int_{\mathit{\Gamma}}\left\{V_r(p)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}+V_\theta(p)r(p)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}p}+V_\varphi(p)r(p)\sin\theta(p)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right\}\mathrm{d}p\end{aligned} \tag{27}$$

を計算すればよいことがわかる．

座標曲面上での面積分

球座標の座標曲面上での面積分の求め方について説明しよう．そのために例として $\theta\varphi$ 曲面上での面積分を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は球座標の成分をもちいて

$$\boldsymbol{V}=V_r(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_r+V_\theta(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_\theta+V_\varphi(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{28}$$

と表されるとする．また, 積分領域として

$$\mathit{\Sigma}=\{(r,\theta,\varphi)\mid r=r_0,\ a\le\theta\le b,\ c\le\varphi\le d\} \tag{29}$$

を考えよう．ただし, $\mathit{\Sigma}$ は r 曲線の正の向きに向きづけられているとする．§1 で (6) として求めたように, $\theta\varphi$ 曲面上の面素ベクトルは

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=h_\theta h_\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\;\boldsymbol{e}_r \tag{30}$$

である．したがって, $\mathit{\Sigma}$ 上の点 (r_0,θ,φ) における $\boldsymbol{V}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の内積をとると

$$\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=V_r(r_0,\theta,\varphi)h_\theta(r_0,\theta,\varphi)h_\varphi(r_0,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{31}$$

となるから, $\mathit{\Sigma}$ 上での $\boldsymbol{V}$ の面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_{\mathit{\Sigma}}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\int_c^d\!\!\int_a^b V_r(r_0,\theta,\varphi)h_\theta(r_0,\theta,\varphi)h_\varphi(r_0,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\int_c^d\!\!\int_a^b V_r(r_0,\theta,\varphi)r_0^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{32}$$

を計算すればよいことがわかる．たとえば, ベクトル場として

$$\boldsymbol{V} = r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_r + r^2\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta + r^3\tan\theta\tan\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{33}$$

を考えれば

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_c^d\!\!\int_a^b r_0^3\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}r_0^3(\cos^2 a - \cos^2 b)(\sin d - \sin c)\end{aligned} \tag{34}$$

となる．ここでは例として $\theta\varphi$ 曲面上の積分領域での面積分の求め方について説明したが, φr 曲面上の積分領域

$$\Sigma = \{(r,\theta,\varphi) \mid c \le r \le d,\ \theta = \theta_0,\ a \le \varphi \le b\} \tag{35}$$

での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_c^d\!\!\int_a^b V_\theta(r,\theta_0,\varphi)h_\varphi(r,\theta_0,\varphi)h_r(r,\theta_0,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_c^d\!\!\int_a^b V_\theta(r,\theta_0,\varphi)r\sin\theta_0\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{36}$$

を計算すればよい．また, $r\theta$ 曲面上の積分領域

$$\Sigma = \{(r,\theta,\varphi) \mid a \le r \le b,\ c \le \theta \le d,\ \varphi = \varphi_0\} \tag{37}$$

での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_c^d\!\!\int_a^b V_\varphi(r,\theta,\varphi_0)h_r(r,\theta,\varphi_0)h_\theta(r,\theta,\varphi_0)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_c^d\!\!\int_a^b V_\varphi(r,\theta,\varphi_0)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{38}$$

を計算すればよい．

一般の曲面上での面積分

ここでは積分領域が一般の曲面上にある場合を考える．まず, 曲面 Σ をパラメータ表示する．つまり, パラメータ p, q をもちいて

$$r = r(p,q), \qquad \theta = \theta(p,q), \qquad \varphi = \varphi(p,q) \tag{39}$$

のように Σ 上の点 $(r(p,q),\theta(p,q),\varphi(p,q))$ を表す．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は球座標の成分をもちいて

$$\boldsymbol{V} = V_r(p,q)\boldsymbol{e}_r + V_\theta(p,q)\boldsymbol{e}_\theta + V_\varphi(p,q)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{40}$$

と表されるとする．ただし, $V_r(r(p,q),\theta(p,q),\varphi(p,q))$ などを簡単に $V_r(p,q)$ などと書いた．このとき, §1 で与えた面素ベクトルの表式 (4) において

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r_1 &= \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)_q \mathrm{d}p, & \mathrm{d}\theta_1 &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_q \mathrm{d}p, & \mathrm{d}\varphi_1 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_q \mathrm{d}p \\
\mathrm{d}r_2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)_p \mathrm{d}q, & \mathrm{d}\theta_2 &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial q}\right)_p \mathrm{d}q, & \mathrm{d}\varphi_2 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)_p \mathrm{d}q
\end{aligned} \tag{41}$$

と選べば, Σ 上の面素ベクトルは

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Biggl\{ & h_\theta(p,q)h_\varphi(p,q)\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(p,q)}\,\boldsymbol{e}_r + h_\varphi(p,q)h_r(p,q)\frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(p,q)}\,\boldsymbol{e}_\theta \\
& + h_r(p,q)h_\theta(p,q)\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(p,q)}\,\boldsymbol{e}_\varphi \Biggr\}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q
\end{aligned} \tag{42}$$

と表される．ただし, $h_r(r(p,q),\theta(p,q),\varphi(p,q))$ などを簡単に $h_r(p,q)$ などと書いた．また, ヤコビアン

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(p,q)} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_q & \left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial q}\right)_p \\ \left(\dfrac{\partial \beta}{\partial p}\right)_q & \left(\dfrac{\partial \beta}{\partial q}\right)_p \end{vmatrix} \tag{43}$$

をもちいた．したがって, Σ 上の点 $(r(p,q),\theta(p,q),\varphi(p,q))$ における $\boldsymbol{V}$ と $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の内積をとると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Biggl\{ & V_r(p,q)h_\theta(p,q)h_\varphi(p,q)\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(p,q)} \\
& + V_\theta(p,q)h_\varphi(p,q)h_r(p,q)\frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(p,q)} \\
& + V_\varphi(p,q)h_r(p,q)h_\theta(p,q)\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(p,q)} \Biggr\}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q
\end{aligned} \tag{44}$$

となるから, $\boldsymbol{V}$ の Σ 上での面積分を求めるには

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_\Sigma \Bigg\{ & V_r(p,q)h_\theta(p,q)h_\varphi(p,q)\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(p,q)} \\
& + V_\theta(p,q)h_\varphi(p,q)h_r(p,q)\frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(p,q)} \\
& + V_\varphi(p,q)h_r(p,q)h_\theta(p,q)\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(p,q)}\Bigg\}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q \\
= \iint_\Sigma \Bigg\{ & V_r(p,q)r^2(p,q)\sin\theta(p,q)\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(p,q)} \\
& + V_\theta(p,q)r(p,q)\sin\theta(p,q)\frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(p,q)} \\
& + V_\varphi(p,q)r(p,q)\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(p,q)}\Bigg\}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q
\end{aligned} \tag{45}$$

を計算すればよいことがわかる.

体積分

空間の領域 Ω におけるスカラー場 f の体積分を考える. §1 で求めたように, 球座標における体積要素は (10) によって与えられる. したがって, 球座標によって体積分を求めるには

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega f\,\mathrm{d}V &= \iiint_\Omega f(r,\theta,\varphi)\,h_r(r,\theta,\varphi)h_\theta(r,\theta,\varphi)h_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \iiint_\Omega f(r,\theta,\varphi)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned} \tag{46}$$

を計算すればよい.

§3　勾配・回転・発散

勾配

スカラー場 f の**勾配** ∇f は

$$\nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}f \tag{47}$$

を満たすベクトル場として定義される. ここで, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は任意の微小変位である. $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s$ をもちいると

$$\nabla f\cdot \boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} \tag{48}$$

と書ける．(48) を f の $\boldsymbol{t}$ 方向についての**方向微分係数**という．勾配の定義 (47) から, 球座標 (r,θ,φ) における ∇f の表式は

$$\nabla f = \frac{1}{h_r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{h_\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{h_\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{49}$$

すなわち

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{50}$$

であることが導かれる．(49) の導出はこの項目の最後で行う．この表式の f として r, θ, φ を考えると

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{e}_r}{h_r}, \qquad \nabla\theta = \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{h_\theta}, \qquad \nabla\varphi = \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{h_\varphi} \tag{51}$$

を得る．したがって, 勾配についての連鎖律

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}\nabla r + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r}\nabla\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta}\nabla\varphi \tag{52}$$

が成り立つことがわかる． さて, 球座標における ∇f の表式 (49) を導こう． 球座標 (r,θ,φ) をもちいると

$$\nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_r\,\mathrm{d}r\,\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_r + h_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_\theta + h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_\varphi \tag{53}$$

と書ける．これを f の全微分の表式

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\varphi r}\mathrm{d}\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r\theta}\mathrm{d}\varphi \tag{54}$$

とくらべると, たとえば, r について

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{h_r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta\varphi} \tag{55}$$

であることがわかる．したがって, θ, φ についても同様に考えると, 球座標における ∇f の表式として (49) が得られる．

回転

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の**回転** $\nabla\times\boldsymbol{V}$ は

$$(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\Delta\boldsymbol{S} = \int_{\partial\sigma}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{56}$$

を満たすベクトル場として定義される．ここで, σ は任意の微小曲面であり, $\Delta\boldsymbol{S}$ はその面素ベクトルである．$\Delta\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\Delta S$ をもちいると

$$(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\Delta S}\int_{\partial\sigma}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{57}$$

と書ける．(57) を $\boldsymbol{V}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向についての**渦度**という．回転の定義 (56) から, 球座標 (r,θ,φ) における $\nabla\times\boldsymbol{V}$ の表式は

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{V}=&\frac{1}{h_\theta h_\varphi}\left\{\left(\frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial\theta}\right)_{\varphi r}-\left(\frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial\varphi}\right)_{r\theta}\right\}\boldsymbol{e}_r\\&+\frac{1}{h_\varphi h_r}\left\{\left(\frac{\partial V_r h_r}{\partial\varphi}\right)_{r\theta}-\left(\frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}\right\}\boldsymbol{e}_\theta\\&+\frac{1}{h_r h_\theta}\left\{\left(\frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}-\left(\frac{\partial V_r h_r}{\partial\theta}\right)_{\varphi r}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{58}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{V}=&\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left(\frac{\partial V_\varphi r\sin\theta}{\partial\theta}\right)_{\varphi r}-\left(\frac{\partial V_\theta r}{\partial\varphi}\right)_{r\theta}\right\}\boldsymbol{e}_r\\&+\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\left(\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\right)_{r\theta}-\left(\frac{\partial V_\varphi r\sin\theta}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}\right\}\boldsymbol{e}_\theta\\&+\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial V_\theta r}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}-\left(\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)_{\varphi r}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{59}$$

であることが導かれる．(58) の導出はこの項目の最後で行う．これを

$$\nabla\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{h_\theta h_\varphi}&\dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{h_\varphi h_r}&\dfrac{\boldsymbol{e}_\varphi}{h_r h_\theta}\\\dfrac{\partial}{\partial r}&\dfrac{\partial}{\partial\theta}&\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\V_r h_r&V_\theta h_\theta&V_\varphi h_\varphi\end{vmatrix} \tag{60}$$

と書くと覚えやすい．この表式と勾配 ∇f の球座標における表式 (49) から重要な性質として

$$\nabla\times(\nabla f)=\boldsymbol{0} \tag{61}$$

が成り立つことがわかる．つまり, 保存場は渦なしである．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が保存場であるとき, スカラー場 f を

$$
\begin{aligned}
f(r,\theta,\varphi) = &\int_{r_0}^{r} V_r(r',\theta_0,\varphi_0)h_r(r',\theta_0,\varphi_0)\,\mathrm{d}r' \\
&+ \int_{\theta_0}^{\theta} V_\theta(r,\theta',\varphi_0)h_\theta(r,\theta',\varphi_0)\,\mathrm{d}\theta' + \int_{\varphi_0}^{\varphi} V_\varphi(r,\theta,\varphi')h_\varphi(r,\theta,\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'
\end{aligned}
\tag{62}
$$

によって定義すると, $\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = \nabla f$ として与えられる．さて, 球座標における $\nabla \times \boldsymbol{V}$ の表式 (58) を導こう．そのために, 定義 (56) の σ として図 5 に示す

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1: \ A \to B, \qquad &\gamma_2: \ B \to C, \\
&\gamma_3: \ C \to D, \qquad &\gamma_4: \ D \to A
\end{aligned}
\tag{63}
$$

を 4 つの辺とする微小曲面を考える．このとき, σ の境界は $\partial\sigma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_4$ と表せる．まず, γ_1, γ_3 に沿う線積分をあわせて考える．このとき, γ_1 においては $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_\theta$ であるのに対し, γ_3 においては $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{e}_\theta$ であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_3} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \left\{v_\theta(r_0,\theta,\varphi_0) - v_\theta(r_0,\theta,\varphi_0+\Delta\varphi)\right\}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
\tag{64}
$$

と書ける．ここで, $v_\theta = V_\theta h_\theta$ とおいた．さらに, $v_\theta(r_0,\theta,\varphi_0+\Delta\varphi)$ を $\Delta\varphi$ についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$
v_\theta(r_0,\theta,\varphi_0+\Delta\varphi) = v_\theta(r_0,\theta,\varphi_0) + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi_0}\right)_{r_0\theta}\Delta\varphi
\tag{65}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\gamma_3} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= -\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi_0}\right)_{r_0\theta}\Delta\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi_0}\right)_{r_0\theta_0}\Delta\theta\Delta\varphi = -\left(\frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial\varphi_0}\right)_{r_0\theta_0}\Delta\theta\Delta\varphi
\end{aligned}
\tag{66}
$$

となる．ただし, 2 番目の等式においては $\Delta\theta$ が微小量であることから被積分関数を $\theta = \theta_0$ における値で置き換えて積分を評価した．次に, γ_2, γ_4 に沿う線積分をあわせて考える．このとき, γ_2 においては $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_\varphi$ であるのに対し, γ_4 においては $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{e}_\varphi$ であるこ

とに注意すると

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_2}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\gamma_4}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi}\{v_\varphi(r_0,\theta_0+\Delta\theta,\varphi)-v_\varphi(r_0,\theta_0,\varphi)\}\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\tag{67}$$

と書ける．ここで, $v_\varphi=V_\varphi h_\varphi$ とおいた．さらに, $v_\varphi(r_0,\theta_0+\Delta\theta,\varphi)$ を $\Delta\theta$ についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$v_\varphi(r_0,\theta_0+\Delta\theta,\varphi)=v_\varphi(r_0,\theta_0,\varphi)+\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta_0}\right)_{\varphi r_0}\Delta\theta\tag{68}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\gamma_4}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta_0}\right)_{\varphi r_0}\Delta\theta\,\mathrm{d}\varphi\\&=\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta_0}\right)_{\varphi_0 r_0}\Delta\theta\Delta\varphi=\left(\frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial\theta_0}\right)_{\varphi_0 r_0}\Delta\theta\Delta\varphi\end{aligned}\tag{69}$$

となる．ただし, 2 番目の等式においては $\Delta\varphi$ が微小量であることから被積分関数を $\varphi=\varphi_0$ における値で置き換えて積分を評価した．以上から, 微小曲面 σ の境界 $\partial\sigma$ に沿う線積分は

$$\int_{\partial\sigma}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\left\{\left(\frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial\theta_0}\right)_{\varphi_0 r_0}-\left(\frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial\varphi_0}\right)_{r_0\theta_0}\right\}\Delta\theta\Delta\varphi\tag{70}$$

と書けることがわかる．一方, この微小曲面 σ については $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_r$, $\Delta S=h_\theta h_\varphi\Delta\theta\Delta\varphi$ であるから, (57) によって,

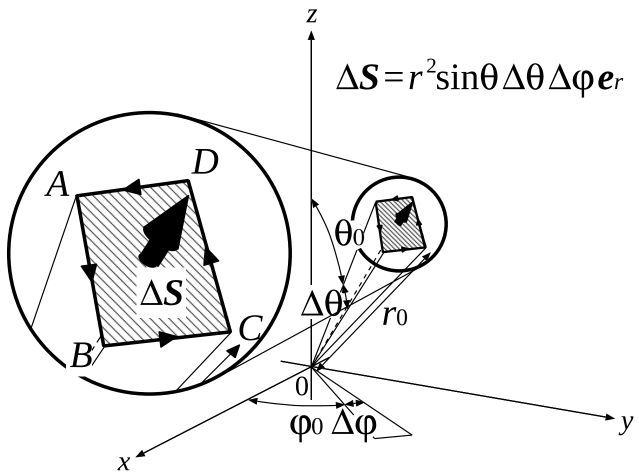
$$(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{h_\theta h_\varphi}\left\{\left(\frac{\partial V_\varphi h_\varphi}{\partial\theta_0}\right)_{\varphi_0 r_0}-\left(\frac{\partial V_\theta h_\theta}{\partial\varphi_0}\right)_{r_0\theta_0}\right\}\tag{71}$$

が得られる．したがって, $(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{e}_\theta$, $(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{e}_\varphi$ についても同様に考え, r_0, θ_0, φ_0 をあらためて r, θ, φ とおくと, 球座標における $\nabla\times\boldsymbol{V}$ の表式として (58) が得られる．

発散

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の**発散** $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}\,\Delta V=\iint_{\partial\omega}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{72}$$



$A = (r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0)\quad B = (r_0,\ \theta_0+\Delta\theta,\ \varphi_0)$

$C = (r_0,\ \theta_0+\Delta\theta,\ \varphi_0+\Delta\varphi)\quad D = (r_0,\ \theta_0,\ \varphi_0+\Delta\varphi)$

図 5　球座標における回転 $\nabla \times \boldsymbol{V}$ の r 成分を求めるための積分領域.

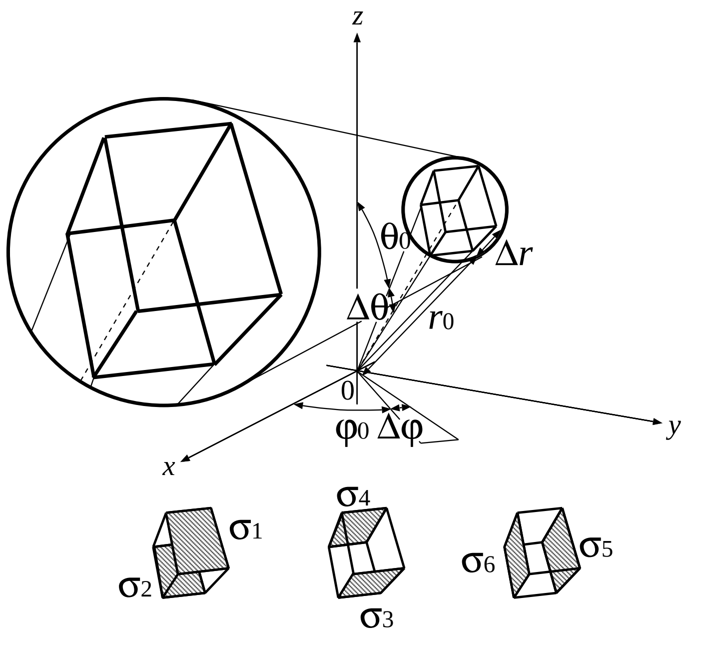


図 6　球座標における発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ の表式を求めるための積分領域.

を満たすスカラー場として定義される．ここで, ω は体積 ΔV の任意の微小領域であり, $\partial\omega$ は ω の境界を表す．発散の定義 (72) から, 球座標 (r,θ,φ) における $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ の表式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\left\{\left(\frac{\partial V_r h_\theta h_\varphi}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}+\left(\frac{\partial V_\theta h_\varphi h_r}{\partial\theta}\right)_{\varphi r}+\left(\frac{\partial V_\varphi h_r h_\theta}{\partial\varphi}\right)_{r\theta}\right\} \tag{73}$$

すなわち

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left(\frac{\partial V_r r^2\sin\theta}{\partial r}\right)_{\theta\varphi}+\left(\frac{\partial V_\theta r\sin\theta}{\partial\theta}\right)_{\varphi r}+\left(\frac{\partial V_\varphi r}{\partial\varphi}\right)_{r\theta}\right\} \tag{74}$$

であることが導かれる．(73) の導出はこの項目の最後で行う．この表式と回転 $\nabla\times\boldsymbol{V}$ の球座標における表式 (58) から重要な性質として

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})=0 \tag{75}$$

が成り立つことがわかる．つまり, ベクトル場の回転は湧き出しなしである．さて, 球座標における $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ の表式 (73) を導こう．そのために, 定義 (72) の ω として図 6 に示す

$$\begin{array}{ll}\sigma_1:(r_0+\Delta r,\ \ \theta\ \ ,\ \ \varphi\ \ ) & \sigma_2:(r_0,\ \theta\ ,\ \varphi\ )\\ \sigma_3:(\ \ r\ \ ,\theta_0+\Delta\theta,\ \ \varphi\ \ ) & \sigma_4:(\ r\ ,\theta_0,\ \varphi\ )\\ \sigma_5:(\ \ r\ \ ,\ \ \theta\ \ ,\varphi_0+\Delta\varphi) & \sigma_6:(\ r\ ,\ \theta\ ,\varphi_0)\\ \multicolumn{2}{l}{r_0\le r\le r_0+\Delta r,\ \theta_0\le\theta\le\theta_0+\Delta\theta,\ \varphi_0\le\varphi\le\varphi_0+\Delta\varphi}\end{array} \tag{76}$$

を 6 つの側面とする微小領域を考える．このとき, ω の境界は $\partial\omega=\sigma_1+\cdots+\sigma_6$ と表せる．まず, σ_1 と σ_2 の上での面積分をあわせて考える．このとき, σ_1 においては $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_r$ であるのに対し, σ_2 においては $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_r$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}&\iint_{\sigma_1}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\sigma_2}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta}\{v_r(r_0+\Delta r,\theta,\varphi)-v_r(r_0,\theta,\varphi)\}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{77}$$

と書ける．ここで, $v_r=V_r h_\theta h_\varphi$ とおいた．さらに, $v_r(r_0+\Delta r,\theta,\varphi)$ を Δr についてテイラー展開し 2 次以上の項を無視すると

$$v_r(r_0+\Delta r,\theta,\varphi)=v_r(r_0,\theta,\varphi)+\left(\frac{\partial v_r}{\partial r_0}\right)_{\theta\varphi}\Delta r \tag{78}$$

であるから

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma_1} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\sigma_2} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\Delta\theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r_0}\right)_{\theta\varphi} \Delta r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r_0}\right)_{\theta_0\varphi_0} \Delta r\Delta\theta\Delta\varphi \\ &= \left(\frac{\partial V_r h_\theta h_\varphi}{\partial r_0}\right)_{\theta_0\varphi_0} \Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\end{aligned} \tag{79}$$

となる．ただし, 2 番目の等式においては $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ が微小量であることから被積分関数を $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ における値で置き換えて積分を評価した．σ_3 と σ_4, σ_5 と σ_6 の上での面積分についても同様に考えると

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial\omega} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \left\{\left(\frac{\partial V_r h_\theta h_\varphi}{\partial r_0}\right)_{\theta_0\varphi_0} + \left(\frac{\partial V_\theta h_\varphi h_r}{\partial \theta_0}\right)_{\varphi_0 r_0} + \left(\frac{\partial V_\varphi h_r h_\theta}{\partial \varphi_0}\right)_{r_0\theta_0}\right\} \Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\end{aligned} \tag{80}$$

となる．一方, $\Delta V = h_r h_\theta h_\varphi \Delta r\Delta\theta\Delta\varphi$ であるから, r_0, θ_0, φ_0 をあらためて r, θ, φ とおくと, 球座標における $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ の表式として (73) が得られる．

ラプラシアン

球座標におけるラプラシアンの具体的な表式は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \Bigg\{ & \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{h_\theta h_\varphi}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{h_\varphi h_r}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{h_r h_\theta}{h_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r\theta} \Bigg\} \\
= \frac{1}{r^2} & \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\varphi r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right)_{r\theta}
\end{aligned}
\tag{81}
$$

である．