線形代数のポイント

2026年7月16日

(1) ブラベクトルとケットベクトル

列ベクトル (縦ベクトル) を $|a\rangle$ と表し，**ケットベクトル**とよぶ。また，行ベクトル (横ベクトル) を $\langle a|$ と表し，**ブラベクトル**とよぶ。

(2) ケットベクトルの列ベクトル表現

任意のケットベクトル $|a\rangle$ は**基底** $e = \{|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle\}$ によって

$$|a\rangle = a_1 |e_1\rangle + \cdots + a_n |e_n\rangle \tag{1}$$

と展開される。このとき，

$$|a\rangle \overset{e}{=} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

と表し，右辺を基底 e による $|a\rangle$ の**列ベクトル表現**という。

(3) ケットベクトルのエルミート共役

ケットベクトル $|a\rangle$ の**エルミート共役**を

$$\langle a| = a_1^* \langle e_1| + \cdots + a_n^* \langle e_n| \tag{3}$$

によって定義する。ここで，$\langle e_i|$ は $\langle e_i|e_j\rangle$ が $|e_i\rangle$ と $|e_j\rangle$ の**内積**で与えられるようなブラベクトルである。

(4) 正規直交基底

$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ を満たす基底を**正規直交基底**という。このとき，

$$\langle a| \overset{e}{=} [\, a_1^* \cdots a_n^* \,] \tag{4}$$

と表し，右辺を基底 e による $\langle a|$ の**行ベクトル表現**という。また，$|a\rangle$ と $|b\rangle$ の内積は

$$\langle a|b\rangle = [\, a_1^* \cdots a_n^* \,] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1^* b_1 + \cdots + a_n^* b_n \tag{5}$$

で与えられる。これを**標準内積**という。特に，$\langle e_i|a\rangle = a_i$ である。

(5) 線形変換

線形変換とはケットベクトルをもう一つのケットベクトルへと変換する操作 $\hat{X}$ で

$$\hat{X}(|a\rangle + |b\rangle) = \hat{X}|a\rangle + \hat{X}|b\rangle \qquad \hat{X}(\lambda|a\rangle) = \lambda(\hat{X}|a\rangle) \tag{6}$$

を満たすものをいう。ここで，$|a\rangle$，$|b\rangle$ は任意のベクトル，λ は任意の複素数である。任意の $|a\rangle$ に対し $\hat{I}|a\rangle = |a\rangle$ を満たす線形変換 $\hat{I}$ を**恒等変換**という。また，$\hat{X}\hat{X}^{-1} = \hat{X}^{-1}\hat{X} = \hat{I}$ を満たす線形変換 $\hat{X}^{-1}$ が存在するとき，$\hat{X}^{-1}$ を $\hat{X}$ の**逆変換**という。

(6) 線形変換の行列表現

$X_{ij} = \langle e_i|\hat{X}|e_j\rangle$ を並べて

$$\hat{X} \overset{e}{=} \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

と表し，右辺を基底 e による $\hat{X}$ の**行列表現**という。

(7) 線形変換のエルミート共役

行列表現が

$$\begin{bmatrix} X_{11}^* & \cdots & X_{n1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n}^* & \cdots & X_{nn}^* \end{bmatrix} \tag{8}$$

で与えられるような線形変換を $\hat{X}^\dagger$ と表し，これを $\hat{X}$ の**エルミート共役**という。

(8) エルミート変換とユニタリ変換

$\hat{X}^\dagger = \hat{X}$ を満たす線形変換 $\hat{X}$ を**エルミート変換**という。また，$\hat{X}^\dagger = \hat{X}^{-1}$ を満たす線形変換 $\hat{X}$ を**ユニタリ変換**という。

(9) 正射影

$|e_i\rangle\langle e_i|$ を e_i 軸への**正射影**という。このとき，$|e_i\rangle\langle e_i|a\rangle = a_i|e_i\rangle$ である。

(10) 完全性関係

正射影の総和は恒等変換に等しい。すなわち，

$$\hat{I} = |e_1\rangle\langle e_1| + \cdots + |e_n\rangle\langle e_n| \tag{9}$$

が成り立つ。これを**完全性関係**という。

(11) 固有値・固有ベクトル

$\hat{X}\,|p_i\rangle = \xi_i\,|p_i\rangle$ を満たす複素数 ξ_i および零ベクトルでない $|p_i\rangle$ が存在するとき，ξ_i を $\hat{X}$ の**固有値**，$|p_i\rangle$ を固有値 ξ_i に属する**固有ベクトル**という。

(12) 対角化可能な線形変換

$\hat{X}$ の固有ベクトルからなる基底 $p = \{\,|p_1\rangle\,, \cdots,\, |p_n\rangle\}$ をとれるとき，$\hat{X}$ は**対角化可能**であるという。このとき，基底 p による $\hat{X}$ の行列表現は対角行列

$$\hat{X} \overset{p}{=} \begin{bmatrix} \xi_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \xi_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

となる。

(13) 同時対角化可能な線形変換

$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ の**交換子**を $[\,\hat{X}, \hat{Y}\,] = \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X}$ によって定義する。$[\,\hat{X}, \hat{Y}\,] = 0$ ならば，$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ は**同時対角化可能**である。つまり，$\hat{X}$ と $\hat{Y}$ の共通の固有ベクトルからなる基底をとることができる。

(14) 正規変換

$[\,\hat{X}, \hat{X}^\dagger\,] = 0$ を満たす線形変換 $\hat{X}$ を**正規変換**という。正規変換の場合，その固有ベクトルからなる正規直交基底をとることができる。エルミート変換，ユニタリ変換は正規変換である。

(15) 正規変換のスペクトル分解

正規変換 $\hat{X}$ は

$$\hat{X} = \xi_1\,|p_1\rangle\langle p_1| + \cdots + \xi_n\,|p_n\rangle\langle p_n| \tag{11}$$

と表すことができる。これを $\hat{X}$ の**スペクトル分解**という。このとき，$\hat{X}^\dagger$ のスペクトル分解は

$$\hat{X}^\dagger = \xi_1^*\,|p_1\rangle\langle p_1| + \cdots + \xi_n^*\,|p_n\rangle\langle p_n| \tag{12}$$

である。また，$\hat{X}$ が逆変換をもつならば，

$$\hat{X}^{-1} = \frac{1}{\xi_1}\,|p_1\rangle\langle p_1| + \cdots + \frac{1}{\xi_n}\,|p_n\rangle\langle p_n|\,| \tag{13}$$

である。